カルタン他

代数構造と位相構造

庄司浩三　訳

東京図書株式会社

序

1956年に，フランス数学会は，公教育の数学教師の会との合意で，すべての教育課程の数学教師のために，講習会の二つの課程を編成することを決定した．

七つの講義からなる第一の課程（1956年2月から6月まで）は代数構造を取扱った．十の講義からなる第二の課程（1956年11月から1957年6月まで）は位相構造を取扱った．

これらの講義はすべて，パリーのソルボンヌのアンリー・ポアンカレ研究所で，現職の教師たちの多数の熱心な受講者の前で行なわれ，新進気鋭の教師と老練な同僚たちがこの大学で机を共にした．その講義にひきつづいて，質疑と討論が行なわれたがそれらはここでは集録されていない．

講師自身によって編集されたこれらの講義は定期的に《数学教師の会誌（Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques)》に掲載された．それらはすべての地方とすべての教育課程にちらばっているこの会の二千六百人の会員に配布された．われわれの知っているところでは，この講義のいくつかは，《数学と教育（Mathématiques & Paedagogia)》，ベルギーの数学教師の雑誌，およびイタリーの雑誌に転載された．

数学教育誌のこれらの記事を集めてこの講習会の全体を集録することは，散逸してしまった（あるいは絶版になってしまった）これらの雑誌を入手することができないすべての人びとに役立つであろう．同時に，それはその意義が力説されるに値する教育的協同事業の証拠となる．

実際，この労作は論文ではない——すぐれたものもあるが——この領域で，事がらの本質を示していないと非難された通俗化の概論のようなものである．これはむしろ現代の論文を読むことと研究への序論と考えるべきである．ともかく，この労作はその読者に数学の現代的な様相を知りたいという気持を起こさせ，それによって彼等の教育の刷新に寄与するだろう．講習会を組織したことは，この点だけに関していえば目的を達した．この成功は既成の科学を教えるものと自分で作りだす科学を教授するものとの間の接触の必要が痛感されていることを証明した．

研究の急速な拡大と，発見のますます早い進歩によって，初等的な段階で教育している教師でさえも，その理論上の知識を刷新しなければならない．大学で学んで得た知識は定

期的に刷新する必要がある．彼等の教育さえも科学の新しい発見を利用しなければならない，すなわち今日は今日の数学を教えなければならない．このように，彼等を待ち受けている研究と探求のために生徒をよりよく導かなければならない．

したがって，この講習会は科学の発展と教育自身の発展に適合すべきであるという二重の要求に応ずるという永遠の教育の形成に参加している．われわれは科学の進歩を考慮せずに，もっぱら《職業的こつ》と《成功している方法》にのみ終始している教育方法を公正に批判した．この講習会は反対に現代の科学の見通しの上でいくつかの戸口をもうけた，そして科学的教育で無限に必要とされている飛躍を教育的探究でもたらすにちがいない．

この探求の将来は楽観的にながめてよいだろう．この講習会を通じて，協力と尊敬にみちた美しき精神が種々の教育課程で教えている教師の間に現われた．一見して，大学の先生方が最も大きな努力をしたことは真実である．そこでわれわれは講師の模範的な献身に対して感謝をする．やがて，中等教育第二段階（日本の高校に相当）の教師たちは生徒をより上級の研究に導くことに尽力するであろう．最後に，この協力はまさしく，子供のときにはだれもがほとんどつねに現わしている無限の賞嘆すべき創造力を，よく適合したさまざまな方法で，より上級の研究にまで持続させるべく生徒を導かなければならない科学教育の深奥な統一を示している．

講師と熱心な受講者は，この労作が存在することを可能ならしめたがゆえに，われわれの感謝を受ける権利をもっている．数学教育の会はこの出版に際して，その協力を与えることにより，この出版を国際的な規模のものとし，そしてつねに行なっていることであるが，教育による科学の進歩のよき担い手であることを表明している．

ソルボンヌ大学教授

G. ショケ

数学教師の会会長

G. ワルジンスキー

目　　次

序

代数構造

代数構造　／　H. カルタン…… 3
環. 合同. イデアル　／　P. ドゥブレィ…… 17
線型空間. 線型形式と線型方程式　／　G. ショケ…… 31
線型写像と行列　／　A. リィチネロヴィチ…… 47
二次形式とエルミート形式　／　P. ルロン…… 73
典型群　／　L. ルジール…… 93
射影空間　／　A. ルヴュ…… 107

位相構造

数直線. 基本的な位相的性質　／　G. ショケ…… 117
ユークリッド空間と距離空間. 距離の概念と位相の概念　／　A. ルヴュ…… 135
距離空間の構造に関連した概念　／　G. ショケ…… 147
いくつかの関数空間といろいろな収束の仕方についての研究
　／　J. ディクスミイル…… 159
一般位相の概念. 位相空間の構成の仕方　／　Ch. ピソー…… 167
コンパクト空間と局所コンパクト空間　／　Ch. ピソー…… 173
代数構造と位相構造の両立性. 群と位相線型空間　／　R. ゴドマン…… 181
次元の概念について　／　H. カルタン…… 191
被覆空間—基本群　／　J.-P. セル…… 205
代数的位相幾何学. ホモロジーの原理　／　L. シュヴァルツ…… 219

索　引…… 230
訳者あとがき

代　数　構　造

代　数　構　造

ソルボンヌ大学教授

H. カルタン

1. 序　　論

ここ数十年来，代数学が数学の各分野に侵透してきているのが実情である．特に，E. ネーター女史に刺激されて（1920年代とその後数年），数学者は数学のほとんどあらゆる分野で，代数学の基本的な概念が果たしている役割をますます明確に意識するようになった．さらに，たとえば純粋な代数学の多少高度ないくつかの定理を解析学へ利用できる可能性さえも意識するようになった．もちろん，この利用するということは目新しいことではないが（とりわけ前世紀末におけるリーの理論の発展について想起せよ），特に新しいことはわれわれがそのことを認識していることである．

数学の各分野における現在のような代数化にともなって，いかなる研究者ももはや欠くべからざるものとなった手段 ── 現代代数学 ── を知らないではすまされなくなった．おかげで，代数学は各分野から利益を受けている．なぜなら，トポロジーや解析学が絶えず新しい問題を代数学に課しており，それによって二十年ほど前にはほとんど想像もできなかった発展がうながされているからである．

第二級[1] の数学教育はこのような進展を受け入れるべきであり，せめて完成級[1] はそうあるべきである．すなわち，それは教科プログラムの修正の方向よりは新しい観点を考慮しつつ古典的な理論を展開するやり方である．これが疑いもなく数学会がこの一連の講習会のイニシアチブをとった理由である．

---

[1] フランスの後期中等教育（リセ）（15～18才）は第二級（日本での高校一年），第一級（高校二年），完成級（高校三年）である．［訳注］

ところで，代数学とは何か？　簡単な言葉で，数学の他の分野と対比して正確にそれを位置づける定義を与えることは容易ではない．もちろん，科学の発展の各時代ごとに，各数学者は何が代数学か，何が代数学でないかということにかなり明確な判断をもっている．しかし，明解な定義はすべて将来の科学の進展におくれてしまうか，あるいはあまりにも狭義なものとなる危険がある．実際，代数学に乗り越えることのできない制限を前もってもうけることはできない（これは科学の他のすべての分野についても同様である），なぜなら，われわれは探求していくなかで出会うであろう新しい領域を予見する方法を知らないからである．

おおまかにいって，代数学とは元自身の性質を考慮せずに，一つまたはいくつかの集合の元の上でのある種の**演算**を研究するものであるということができるだろう．ある演算の与えられている集合について述べることができるすべてのことがらは，それと**同型**である他のすべての集合に対しても適用できる（同型の概念についてはあとで説明する）．代数学についてのこのような理解は，ほぼ一世紀前より支配的になっているものである．しかしながら，最近の発展の結果あまりにも狭くなった枠を疑いもなく拡げざるをえなくなっており，この理解は今日では古くさくなっているおそれがある．ここでは，私が古典的と呼ぶ概念についていくつかの例を示すだけにとどめよう．現在のいくつかの進展をもたらしている新しい観点を説明することは，数十年後に他の人に任せよう．

2. 演算の概念

この概念は算数の第一歩から出会っている．演算とは，二つの元 a，b に対して一つの元 c を対応させる算法である（ときには a と b の和と呼び，ときにはそれらの積と呼んだり，さらに別の名称で呼ぶ場合もある）．結局，これは**関数**の概念にほかならない．すなわち，三つの集合 A，B，C が与えられているとき，元 $a\in A$ と $b\in B$ で作られた対 (a, b) の集合は A と B の**積集合**と呼ばれる集合で，それを $A\times B$ で表わすと，演算とは簡単にいえば，集合 $A\times B$ 上で定義され，その値を集合 C でとる関数である．これはまた，$A\times B$ から C への**写像**ともいわれる．

集合 A，B，C が一致する場合が重要である．すなわち，写像 $f: A\times A \to A$ を考える．このような関数は**内算法**と呼ばれる．単に $B=C$ と仮定するときは，**外算法**が得られる．すなわち，それは $A\times B$ から B への写像 f である．この場合，各元 $a\in A$ は B

から B への写像を定義し，それは b に対して $f(a, b)$ を対応させるものである．一方，B から B への写像は B の**変換**と呼ばれるものである．したがって，外算法は A の各元に対して B の一つの変換を対応させる．よって，集合 A はしばしば**作用域**といわれる．そして A は B に**作用する**という．

算法の例を示そう．整数の加法は整数の対に一つの整数を対応させるものであり，整数の乗法も同様である．これらは整数の集合における内算法である．分数，実数，複素数，一つまたはいくつかの変数の多項式の和，積についても同様である．初等幾何学で，**移動**の概念を知っている．すなわち，移動 a と移動 b をつづけて行なうと，その結果も一つの移動 c になり，しばしばこれを a と b の積（または結合）と呼ぶ．このように移動の対 (a, b) に対して一つの移動 c が対応できる．これは移動の集合における算法である．

他の例を示そう．X と Y を同じ集合 E の部分集合とするとき，それらの**共通部分** $X \cap Y$ とは X と Y に同時に属する E の元からなる集合であり，**合併** $X \cup Y$ とは二つの集合 X, Y の少なくとも一方に属する E の元からなる集合である．対 (X, Y) に対して，共通部分 $X \cap Y$ を対応させる算法は，E のすべての部分集合の集合 A における内算法であり，同様に X と Y に対して $X \cup Y$ を対応させる算法も A における内算法である．

観点をかえて，二つの整数 a, b とその最大公約数 $d(a, b)$ を考えると，写像 $(a, b) \rightarrow d(a, b)$ は整数の集合における算法である．最小公倍数についても同様である．

なお，**語**について説明しよう．集合 E が与えられているとき，E の異なる元または同じ元の有限列 $uvwxy$ を《語》と呼ぶ．さらに，《空（語）》が存在する．これは空である一つの列として定義する．二つの語 $uvwxy$ と $pqrs$ が与えられているとき，この両者をつづけて書いて新しい語 $uvwxypqrs$ が定義される．これは E の元で作られた語の集合 A における内算法である．語 uvw と空語との結合は，同じ語 uvw である．

これまでの例はすべて内算法の例であった．ここで外算法の例を二つ与えよう．初等幾何学の平面（または空間）において，一点 O をとり，各実数 t に対して中心が O で倍率が t の倍写像[1] を対応させると，この写像は変換である．これは作用域 A が実数 t の集合であり，その作用する集合 B が幾何学の平面（または空間）であるような外算法である．

また空間の《図形》（たとえば，三角形）を考えると，移動は図形を図形に変換する．したがって，A として移動の集合をとり，B として空間の図形の集合をとれば，作用域が

---

1) 平面上の各点に対して始点が O であるベクトル $\boldsymbol{x}$ を対応させるとき，写像 $\boldsymbol{x} \rightarrow t \cdot \boldsymbol{x}$ である．［訳注］

移動の集合である外算法が得られる.

このあとでは，ほとんど内算法の場合だけを扱う.

3. 内算法についてのいくつかの性質

結合律.　乗法を例にとると（ab は a と b の結合を表わす），任意の a, b, c に対して $(ab)c = a(bc)$ が成立するとき，算法は**結合的**であるという.

前の例で与えた内算法はすべて結合的である．結合的でない例を与えることは容易である．実数の各対 (a, b) に対して，その半分和 $(a+b)/2$ を対応させる算法が結合的でないことはただちにわかる.

算法が結合的であるときは，元 $a_1, \cdots, a_n$ の任意の有限列の結合が定義でき，結合律の一般的な定理が証明できる．たとえば,

$$(ab)(cdef)g = (abc)(de)(fg)$$

が成立する.

可換律.　内算法（考えを固定するために乗法で表わす）が**可換的**であるとは，任意の a, b に対して $ab = ba$ が成立するときである.

前の例で，実数，複素数および多項式の加法と乗法は可換的算法である．同様に，集合の合併と共通部分の演算は可換的である．二つの整数に対して，それらの G.C.M. または L.C.M. を対応させる算法も可換的である．これに反して，幾何学における移動の結合は可換的ではないし，《語》の結合も可換的ではない.

このように結合的であるが可換的でない算法が存在する．同様に，可換的であるが結合的でない算法も存在する．たとえば，二つの実数 a, b に対してその半分和を対応させるものである.

算法が可換的で同時に結合的であるときは，どんな元の族に対しても，それをどのような順序で並べるかを明示する必要なしにその結合を定義できる.

中立元.　内算法（考えを固定するために乗法で表わす）が与えられているとき，すべての元 a に対して $ae = a$, $ea = a$ であるような元 e を中立元と呼ぶ.

このような元が存在するかどうかは確かではないが，そのような元が存在するならば，それはただ一つである．なぜなら，もしも e と e' が二つの中立元ならば，$e = ee' = e'$ であるからである.

逆元.　中立元 e をもった内算法を考えよう．$ab = ba = e$ であるとき，a と b は互いに他の逆元であるという．

a が少なくとも一つの逆元をもち，かつ算法が結合的であるときは，a の逆元はただ一つである．なぜなら，b と b' を a の逆元とすれば，

$$b = be = b(ab') = (ba)b' = eb' = b'$$

が成立するからである．

算法が加法（通常この算法が可換的であるときにかぎって用いられる）で表わされている場合に，中立元が存在するならば，普通それを 0（零）で表わす．したがって

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

この場合，《逆元》のかわりに《反元》という．$a + b = 0$ のとき，a と b は互いに他の反元である．

4. 一つまたはいくつかの算法によって定義された代数構造

E を集合とする．一つまたはいくつかの算法を与えることによって E 上に代数構造が定義される．明示されたいくつかの条件を満足する同数の算法によって定義された（どんな集合上であってもかまわない）すべての代数構造に対して同じ名称を与える．これをいくつかの例で示そう．

群.　集合 E 上の群構造は，つぎに列記する条件（または《公理》）を満足するようなただ一つの算法によって定義される．

公理 1.　算法は結合的である．

公理 2.　中立元が存在する．

公理 3.　すべての元に対して逆元が存在する．

このような算法の与えられた集合 E を群という．

たとえば，整数（正，負および零）の加法は群の算法である．実数，複素数，前に説明した算法の与えられた移動の集合の加法はすべて同様である．零を除いた実数および複素数の乗法も群の算法である．これに反して，正整数の乗法については一般に逆元をもたないから群の算法ではない．集合の共通部分および合併の算法，同様に《語》の算法も群の算法ではない．

算法が可換的のとき，群は**アーベル群**（または**可換群**）と呼ばれる．

環.　集合 A 上の環構造は，つぎの公理を満足する加法と乗法と呼ばれる二つの算法によって定義される．

公理 1.　加法はアーベル群の算法である（その中立元を $\mathbf{0}$ で表わす）．

公理 2.　乗法は結合的であり，中立元をもち，それを $\mathbf{1}$ で表わす（これを単位元と呼ぶ）．$\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ と仮定する．

公理 3.　乗法は加法に関して分配的である．

$$a(b+c)=(ab)+(ac), \quad (b+c)a=(ba)+(ca)$$

任意の元と $\mathbf{0}$ との積は $\mathbf{0}$ に等しいことが容易に結論され，したがって $\mathbf{0}$ は（乗法に関して）逆元をもたない．

乗法が可換的であるとき，その環は**可換環**と呼ばれる．

環の例：正，負および零の整数．実数および複素数．実数または複素数係数の多項式．

体.　すべての元 $\neq \mathbf{0}$ が乗法に関して逆元をもつという追加条件を満たす環 A を体という．

これは A の $\mathbf{0}$ でない元の集合は乗法に関して群をなすということと同じことになる．

例：整数は体をなさない．多項式も体をなさない．有理数，実数，複素数は体である．

もちろん，いろいろな種類の群，環，体が存在する．ガロアはすべての有限体（有限個の元からなるもの）を決定したことを思い起こそう．最も簡単なものは二つの元 $\mathbf{0}$ と $\mathbf{1}$ だけからなる体であり，その加法と乗法は通常のものである（ただし $\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$ とする）．各素数 p と指数の各整数 $f \geqslant 1$ に対して，ちょうど p^f 個の元をもつ体が存在し，かつそのような体はただ一つである．整数 p^f を n で表わすと，この体のすべての元 x は方程式 $x^n - x = 0$ を満足する．（これはその変数のすべての値に対して零となるような，零でない係数をもった多項式の例になっている．この多項式の次数は n であり，そしてこの体の中には n 個の元しか存在しないから，その変数は n 個の値しかとることができないためである．）整数 n が p^f の形でなければ，n 個の元からなる体は存在しない．

5. 同型写像の概念

p^f 個の元をもつ体がただ一つ存在することを述べた．しかしこれはまったく正確とはいえない．正しい表現は，もし二つの体が同数の元をもっているならば，それらは**同型**で

あるということである．これはこれら二つの体の元の間に，加法と乗法を保存する一対一対応が存在することを意味している．一般的に，それぞれ代数構造をもった二つの集合 E と E' に対する**同型写像**の概念が得られる．たとえば，二つの群のあいだの同型は，それぞれの算法の対応関係を保存するこれらの群の元の間の一対一対応である．したがって，指数関数 $f(x)=a^x$ (a は定数で >0, $\neq 1$) は，$f(x+y)=f(x)f(y)$ であるから，実数の加群から正の実数 ($\neq 0$) の乗法群の上への同型写像である．同様に，二つの環 A と A' の同型の概念が得られる．それは加法と乗法を保存する一対一対応であり，かつ A と A' の単位元どうしが対応する．

実際，代数的存在は同型の違いを無視して研究される．研究の対象としている演算の性質だけに興味をもっているから，これは当然のことである．二人の数学者が整数環について話しているとき，彼等が同じ存在について語っているかどうかを知る必要はない．なぜなら，彼等がこの環に対して認めている性質は，その性質を有する二つの環は必ず同型であるということを結論としてもっているからである．

6. すでに与えられている存在から新しい代数的存在の構成．多項式環の例

可換環 A が与えられていると仮定する（たとえば，実数の体，または整数の環，等…）．文字 X についての（形式的な）**多項式環**と呼ばれる新しい環を定義しよう．これらの元は記号的に $\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n$ と表わされる．ここで a_n は A の元で，有限個を除いては零である．記号 X^n はさしあたってはいかなる意味ももたない形式的な文字である．《多項式》を定義するものは，したがって単に有限個以外はすべて零である《係数》の列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ である．これらの多項式の集合に加法を定義する．多項式 $\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n$ と $\sum_{n\geqslant 0} b_nX^n$ との《和》を多項式 $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)X^n$ と定義する．ここで係数は和 a_n+b_n である．この加法は可換的かつ結合的であり，中立元 0（すべての係数が 0 である多項式）をもち，そしてすべての多項式は《反元》をもつことがただちにわかる．したがって，多項式の集合は加法に関して群をなす．

$n\neq p$ に対してすべての係数 a_n が零であるような多項式 $\sum a_nX^n$ を次数 p の**単項式**と呼び，このような単項式を単に a_pX^p と書くことにする．したがって多項式 $\sum a_nX^n$ は異なる次数の単項式 a_nX^n の和であることがわかる．これによって先験的に記号

$\sum a_n X^n$ を用いたことが正当づけられる．

多項式の積はつぎのように定義する．まず，単項式 $a_p X^p$ と単項式 $b_q X^q$ との積を $(a_p b_q) X^{p+q}$ と定義すると，この次数は二つの単項式の次数の和 $p+q$ であり，係数は係数 a_p と b_q との積 $a_p b_q$ である．二つの多項式 $\sum a_n X^n$ と $\sum b_n X^n$ との積は，それぞれを異なる次数の単項式に分解し，それぞれから一つずつの単項式をとりだして積を作り，そしてこれらの積をすべて加えたものとして定義する．したがって，積は多項式 $\sum c_n X^n$，$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ で表わされる．

このようにして定義された加法と乗法の与えられた X についての多項式の集合 $A[X]$ は，係数が 1 で次数が 0 の単項式を単位元としてもつ可換環であることが証明される．このようにして文字 X についての（係数は与えられた可換環 A の中でとる）多項式環が定義できた．

X は単なる記号である．しかしそれを《値》によっておきかえてもよいことがわかる．元 $x \in A$ が与えられているとき，各単項式 $a_n X^n$ に対して A の元 $a_n x^n$（係数 a_n と x の n 乗との積）を対応させ，つぎに多項式 $\sum a_n X^n$ に対して $a_n x^n$ の和を対応させる．このようにして X を値 x でおきかえると多項式の《値》と呼ばれる A の一つの元が得られる．x を A の中で変化させると，与えられた多項式の《値》は A の中に値をとる x の関数である．したがって，各多項式は関数を定義するが，はじめに与えた形式的多項式とそれによって定義される関数を混用しないように注意する必要がある．

さて，元 $\alpha \in A$ を選び，各多項式 $\sum a_n X^n$ に対してその値 $\sum a_n \alpha^n \in A$ を対応させると，環 $A[X]$ から環 A への写像 f が得られる．この写像は，二つの多項式の和に対してはそれらの値の和を，そして二つの多項式の積に対してはそれらの値の積を対応させる．写像 f のこの性質が保証されるように，形式的多項式の加法と乗法の定義を正確にしておいた．したがって，u と v が二つの多項式ならば，

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(uv) = f(u)f(v), \qquad f(1) = 1$$

が成立する．

二つの環 B，A とこれらの条件を満たす B から A への写像 f が存存するとき，f は B から A への**準同型写像**であるという．準同型の概念は代数構造をもった他の集合に対しても一般化できる．おおまかにいって，準同型とは算法を保存する写像である．

ふたたび多項式にもどり，前の方法を一般化しよう．A' を A を含んでいる環とすると，

文字 X を A' に属する（もはや A だけに属するものではない）一つの値 x でおきかえることができる．したがって各多項式 $\sum a_nX^n$ は A' の元である値 $\sum a_nx^n$ をとる．このとき，x は A の元と可換である，すなわちすべての $a \in A$ に対して $ax = xa$ であるという条件のもとで，ふたたび環 $A[X]$ から環 A' への準同型が定義される．例： A は実数の体であると仮定し， E を3次元空間の中の始点が O であるベクトルからなる線型空間とすると， E から E への線型写像は環をなす（二つの線型写像の和は定義できるし，積は二つの線型写像をつづけて行なう．すなわち結合することによって得られたものとする）．この線型写像の環 A' は中心をO とする 倍写像のすべてからなる環 A（これをスカラーの体と同一視する）を含んでいる．この場合，実数の係数の多項式 $\sum a_nX^n$ において，X を E から E への線型写像 x でおきかえると，$\sum a_nx^n$ はまた E から E への線型写像であることがわかる．各多項式に対して一つの線型写像を対応させるこの方法は線型空間の線型写像の研究で非常に大切なものである．この例で，形式的多項式の概念から，《変数》 X を係数の環の元以外のものでおきかえることができるという興味あることを知った．他の例としては X を微分作用素でおきかえて得られるもので， それは線型微分方程式の理論の中に出てくる．

7. 商 構 造

既知の構造から新しい代数構造を構成するには（たとえば， 整数環 より 有理数体の構成，あるいは 実数体 から複素数体の構成），しばしば同値関係の概念が必要である．つぎの条件を満足するとき，集合 E の元 x と y とのあいだの関係 $R(x, y)$ は**同値関係**であるという．

1° $R(x, x)$ は真である（《反射律》）．

2° $R(x, y)$ ならば，$R(y, x)$ である（《対称律》）．

3° $R(x, y)$ かつ $R(y, z)$ ならば，$R(x, z)$ である（《推移律》）．

代数学の中に出てくる同値関係の例をあげよう．

1) m を与えられた整数とするとき，二つの整数 x と y とのあいだの関係

差 $x-y$ は m で割り切れる

は同値関係である．

2) より一般的に，Gを乗法で表わされた群とし（元 x の逆元を x^{-1} で表わす），Hを

G の部分群とする，すなわちそれは中立元 e を含む部分集合で，$x \in H$ かつ $y \in H$ のとき $x^{-1}y \in H$ が成立するようなものとする．G の元 x と y のあいだの関係 $x^{-1}y \in H$ は G における同値関係である．例1）の場合 G は整数 $\geqslant 0$ および $\leqslant 0$ からなる加群であり，H は m の倍数からなる部分群である（したがって，算法として和の記号を用いた）．

3）(a, b) と (a', b') を $b \neq 0$，$b' \neq 0$ である整数の二つの対とする．$ab' = a'b$ のとき，それらは同値であると定める．これが実際に同値関係であることを証明しよう．この関係が反射的であり対称的であることは明らかだから，これが推移的であることの証明が残されている．したがって三つの対 $(a, b), (a', b'), (a'', b'')$ が $ab' = a'b$，$a'b'' = a''b'$ を満足するならば，$ab'' = a''b$ が成立することを証明しよう．$ab' = a'b$ の両辺に b'' を掛け，そして乗法の結合律と可換律を考慮すると，$ab'b'' = a'bb'' = ba'b''$ は $a'b'' = a''b'$ より $ba''b'$ に等しい．したがって，$ab'b'' = ba''b'$ であり，よって $b'(ab'' - a''b) = 0$，ここで $b' \neq 0$ であるから，積は因数のいずれか一つが 0 のときだけ零であることより，確かに $ab'' = a''b$ が結論される．

一般にこの証明は整数の対のかわりに，環 A がつぎの条件さえ満たせば，$b \neq 0$ である A の元の対 (a, b) をとっても同様に成立することがわかる．条件は A が u または v が零であるときにかぎって積 uv が零でありうるような可換環であることである．このような環は**整域**と呼ばれる．

整域の例．　A を可換環，$A[X]$ を文字 X の多項式環とする．P と Q を二つの多項式 $\neq 0$，すなわちその係数のすべては零でないとする．したがって $P = a_pX^p + a_{p+1}X^{p+1} + \cdots$，$a_p \neq 0$，$Q = b_qX^q + b_{q+1}X^{q+1} + \cdots$，$b_q \neq 0$ と書ける．よって積 PQ は単項式 $(a_pb_q)X^{p+q}$ と次数 $> p + q$ の単項式との和である．係数環 A が整域のとき（たとえば A が体のとき），積 a_pb_q は $\neq 0$ であるから積 PQ は零ではない．ゆえに環 $A[X]$ はまた整域であることが示された．したがって，多項式の対 (P, Q) と (P', Q')（$Q \neq 0$，$Q' \neq 0$ とする）のあいだに同値関係を定義できる，すなわち最終的に有理分数の同値関係が得られた．これは関数の概念を使わずに，有理分数の同値関係を多項式の恒等式に帰着させる純形式的な方法である．

再び同値関係の一般理論にもどろう．R を集合 E における同値関係とする．x が E の元のとき，x と同値なすべての元の集合を x の**類**と呼ぶ．条件 $1^\circ, 2^\circ$ と 3° は x が x の類に属し，そして x と y が E の二つの元であるならば，x の類と y の類はまったく一致

するか，あるいはまったく共通元をもたないかのいずれかであることを示している．すべての類の集合を E/R で表わし，同値関係 R による E の**商集合**と呼ぶ．また E/R は R による同値な E の元を同一視して得られたものであるという．

さて，前に与えた同値関係の例 1), 2), 3) にもどろう．1) の場合，同値の類は mod. m の（あるいは m を法とする）**剰余類**と呼ばれ，商集合は mod. m の剰余類の集合と呼ばれる．2) の場合，同値類は部分群 H による G の類と呼ばれる．$x \in G$ の類は元 xu からなり，ここで u は H の元すべてをとらせるものである，それを xH で表わす．3) の場合，同値類はまさしく**分数**と呼ばれるものである（A が多項式環のときは《有理分数》と呼ばれる）．

8. 同値関係と両立する算法

R を集合 E における同値関係とし，E の中に内算法が与えられているものと仮定する（考えを固定するために乗法で表わす）．

x と y の結合 xy の同値類が x の類と y の類だけによって定まるならば，類の集合 E/R の中に算法が得られる．

例.　x と y を二つの整数とし，それらの和 $x+y$ を考えよう．$x+y$ の mod. m の類は，x を $x-x'$ が m で割り切れるような x' でおきかえてもかわらないし，また y を $y-y'$ が m で割り切れるような y' でおきかえてもかわらない．このことから mod. m の剰余類の加法が得られる．これは mod. m の剰余類の集合の中で可換的でかつ結合的な算法である．同様に，積 xy の類は x と y の類だけによってきまるから，mod. m の剰余類の乗法が得られる．mod. m の剰余類は可換環をなすことはただちにわかる．整数 m が素数のときは，さらにこれは体をなす．

さてここで，分数の乗法を定義しよう．$b \neq 0$ である対 (a, b) の集合のなかで，算法 $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$ を考えると，これは可換的かつ結合的であり，中立元は $(1, 1)$ である．(aa', bb') の同値類は (a, b) と (a', b') の類だけによってきまることが証明できるから，二つの分数の積が得られる．さらに $(0, 1)$ の類の中にない各元は逆元をもつ．なぜならば (a, b) と (b, a) の積は，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき $(1, 1)$ に同値であるからである．

注意.　対 (a, b) の集合の中で，$b = b'$ であるときの (a, b) と (a', b') のあいだで

$(a, b)+(a', b')=(a+a', b)$ とする定義だけを用いて，分数の加法を定義することは容易である．この算法は商集合に対しても適用できる．したがって，加法と乗法の与えられた A の分数の集合は環であり，それは体 Q でもある．さらに各元 $a \in A$ に対して，分数すなわち $(a, 1)$ の類を対応させると，環 A から体 Q の部分環の上への同型写像 f が得られることが確かめられる．f によって A を体 Q の部分環と同一視することができる（たとえば，整数の環を有理数体の部分環と同一視したり，X についての多項式環を X についての有理分数体の部分環と同一視したりできる）．

最後の例．　位相空間 X の基本群（または《ポアンカレ群》）

ここでは位相空間の定義は与えず，いくつかの例を示すだけにする．通常のユークリッド空間，球面，輪（トーラス）の表面，いくつかの穴のあいた円板，等….

空間 X の中の**路**，または**曲線の弧**の概念を明確にしよう．これは数直線上の線分 $[0, 1]$ から空間 X への連続写像 $t \longrightarrow f(t)$ によって与えられるものとして定義される．$f(t)$ は《パラメーター》 t の異なる値に対して同じ値をとってもよいことを注意しておく．これでなんの不都合もない．

今後空間 X の一点 M を選んでおく．始点が M の閉路を $f(0)=\mathrm{M}$ で $f(1)=\mathrm{M}$ であるような路 $t \longrightarrow f(t)$ と定義する．始点が M である閉路の集合 L の中で，算法を定義しよう．閉路 f と g が与えられているとき，条件

$$h(t)=\begin{cases} f(2t) & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}\right) \\ g(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\right) \end{cases}$$

によって f と g の結合 $h=fg$ を定義する．これは最初の半分の《時間》では閉路 f をとらせ，つぎに残りの半分の時間では閉路 g をとらせるものである．この算法は結合的ではない．なぜならば，三つの閉路 f，g，h が与えられているとき，閉路 $(fg)h$ は最初の四分の一の時間では f をとらせ，つぎの四分の一では g をとらせ，残りの半分では h をとらせることによって得られるものであり，一方閉路 $f(gh)$ は最初の半分の時間では f を，つぎの四分の一では g を，そして残りの四分の一では h をとらせることによって得られるものであるからである．

今度は閉路の集合 L の中に同値関係 R を導入しよう．閉路 f が閉路 g に同値である（または g にホモトープである）といわれるのは，始点が M の閉路の連続な族による f から g への連続変形が存在することである．正確には，これは $[0, 1]$ の中で変化する二

つの変数 t と u の連続関数 $F(t,u)$ で

$$F(t,0)=f(t), \quad F(t,1)=g(t), \quad F(0,u)=F(1,u)=\mathbf{M}$$

であるものが存在することを意味する.

これは確かに同値関係であり，そして閉路の結合はこの関係と矛盾しないことが証明される．したがって，閉路の類の集合 L/R の中に算法が得られ，この場合は結合的である．これが群の算法であり，その中立元 e は $0 \leqslant t \leqslant 1$ に対してつねに $f(t)=\mathbf{M}$ であるような閉路 f の同値類であることが示される（動かないで点 $\mathbf{M}$ にとどまっている閉路である）．閉路 f が与えられているとき，$f'(t)=f(1-t)$（同じ閉路であるが《逆向き》に動く）によって定義される閉路 f' は，f と f' の類が閉路の類の群 L/R の中で互いに逆元であるという性質をもつ.

いま定義したこの群（点 $\mathbf{M}$ に対する空間 X の基本群）は，トポロジーにおいても，また関数の理論（保型関数）においても重要な役割をもっている．この最後の例で代数学の概念がいかに数学の他の分野へ導入されているかを示した.

環. 合同. イデアル

ソルボンヌ大学教授

P. ドゥブレィ

1. 定義と簡単ないくつかの性質について

元 a, b, … よりなる集合 A が環であると呼ばれるのは，A 上に，慣習的に用いている記号で表わされる加法と乗法と呼ばれる二つの演算，すなわち内算法が定義されており，それがつぎの公理を満足するときである．

Ⅰ． Aは，加法に関してアーベル群である．すなわち，加法は結合的 $a+(b+c)=(a+b)+c$ であり，可換的 $a+b=b+a$ である（この性質は《アーベル》という言葉で表わされているものである）．零と呼ばれ $\mathbf{0}$ で表わされる中立元が存在する，すなわちすべての元 a に対して $a+\mathbf{0}=a$．そしてすべての元 a に対して反元 $-a$ が存在する，すなわち $a+(-a)=\mathbf{0}$（これは簡単に $a-a=\mathbf{0}$ と表わされる）．

Ⅱ． 乗法は結合的である，すなわち $a(bc)=(ab)c$.

Ⅲ． 乗法は加法に関して分配的である，すなわち

$$a(b+c)=ab+ac, \quad (b+c)a=ba+ca.$$

これらの性質は，もちろん A の中のいかなる a, b, c に対しても成立すると仮定されている．

乗法が可換的のとき，その環は**可換環**と呼ばれる．いつでも興味をもたれるのはほとんど可換環についてである．

環を定義する公理のなかに，単位元 e または $\mathbf{1}$ の存在をあげておかなかった（これは，乗法に関しての中立元で，任意の $a\in A$ に対して，$ea=ae=a$ が成立するものであ

る)[1]．このような元が存在するとき，A は（乗法に関して）**単位元をもつ環**と呼ばれる．零ただ一つからなる環では，零が（乗法に対しての）単位元となるが，単位元をもつ環について述べるときは，一般にこの場合は除外する．

任意の環 A で乗法は減法に関しても分配的であり，0 は $0\cdot a = a\cdot 0 = 0$（任意の $a \in A$ に対して）が成立する元であることがただちにわかる．積が零であるためには少なくとも一つの因数が零であることが十分である．この十分条件は特別な環の場合だけ必要条件にもなる．零でない元の積が零になるような環の非常に簡単な例をあとで示す．

一つ以上の元をもつ環 K，$K \neq \{0\}$，は乗法に関してけっして群をなさない．実際，乗法群の性質は関係

$$a \neq 0, \quad a\cdot 0 = 0\cdot 0 (= 0)$$

と矛盾するからである．

しかし，$K - \{0\}$ は乗法に関して群をなすことがありうる（すなわち，K の零でない二元の積が 0 でなく，また単位元 e が存在し，すべての元 $a \neq 0$ の逆元 a^{-1}, $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ であるものが存在することである）．このとき K は**体**であるという．

2. 例

有理整数（$\gtrless 0$ であるもの）の集合 $C = \{\cdots, -m, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ は環であり，単位元をもつ環以外も考えるから，偶数の有理整数の集合も環である．

有理数の集合 Γ，実数の集合 P および複素数の集合 Ω はすべて（C を含んでいる）体であり[2]，代数的数の集合 Σ，すなわち有理数の係数，または結局同じことになるが整数係数の代数方程式の解である数の集合も体である[3]．

一つの環 A が与えられているとする，たとえば上のいずれかの一つとしよう．A の元

---

1) この定義は，H. カルタンの代数構造についての講義で与えられたものとこの点で異なっており，より一般的なものである．それでもなおこれは古典的である．たとえば，〔1〕105，106 ページ，〔3〕44 ページを参照せよ．括弧の番号はこの講義の最後（29 ページ）にのせてある参考文献を示している．

2) 記号 C, Γ, P, Ω は一般的なものではない．あとのいくつかの講義では，それらは Z, Q, R, C で表わされている．

3) この命題は対称関数の理論と容易に関係づけられる．たとえば〔2〕，第 7 章，396 ページ参照．

を係数とする X についての多項式環 $A[X]$ の定義はすでに知っている[1]．つぎに $A[X]$ のなかに係数をもつ Y についての多項式環 $A[X][Y]$ を定義しよう．これらの多項式は $\sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j$，$a_{ij} \in A$ で（この和において係数 a_{ij} のうち有限個だけが零でない），X と Y についての対称性は明らかであり，これによって A の中に係数をもち $A[X,Y]$ で表わされる X と Y についての多項式環と呼ばれるものが得られる．このようにしてつぎつぎと A の中に係数をもつ n 個の不定元 $X_1, \cdots, X_n$ についての多項式環 $A[X_1, \cdots, X_n]$ が定義できる．

環の他の重要な例は，与えられた整数 m についての剰余類環である（代数構造，第8節参照）．これは加法と乗法が両立する mod. m に関しての算術的な合同 R から定義された（この意味で，この合同は整数環 C の加法と乗法に関して正則な合同関係であるともいう）．この環はこの同値関係による C の商集合 C/R または $C/(m)$ である．これを m による割り算によって得られる m 個の剰余の集合 $\{0, 1, \cdots, m-1\}$ で表わすことができる．m 個の各数値に対して容易に作製できる加法と乗法の表によって，注目すべき性質がわかる．$m=4$ に対しては，$2\cdot2=0$ が成立し，$m=6$ に対しては $2\cdot3=0$ が成立する．一般的にいって，法 m が素数でないときはいつでも $C/(m)$ は整域（または整環）ではない．これに反して，素数 p に対しては $C/(p)$ は整域であり，これはまた体でもある（このことについてはあとで述べるだろう）．

複素数体 Ω の中で，α と β が有理数，すなわち $\alpha, \beta \in \Gamma$ であるような数 $\alpha+\beta i$ に注目しよう．このような数の集合は明らかに体であり，これを $\Gamma(i)$ で表わす．この記号は体 Γ と数 i を同時に含んでいる Ω の最小の部分体であることを示すものであり，Γ に i を添加して得られたものであるという．Ω を用いないでつぎの方法によって直接に体 $\Gamma(i)$ を構成することができるが，それはすぐあとで述べる記号的添加の特別な場合である．

多項式環 $\Gamma[x]$ において，多項式 x^2+1 をとりだしそれに対して，前に述べた整数環 C において法 m がなしたと同じ役割をさせよう．したがって，R を $\varphi-\psi$ が x^2+1 の倍数であるときにかぎって $\Gamma[x]$ の二つの多項式 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ のあいだに成立する関係とする．R は同値関係であり，多項式の加法と乗法に関して正則である．多項式の同値類どうしはそれらに含まれる多項式をとることによって加えたり掛けたりすることがで

---

[1] H. カルタンの代数構造についての講義を参照せよ．《純記号》X はときには不定元と呼ばれ，アーベル半群の生成元の役割をなす，〔3〕62 ページ．単位元をもつ環では，これは多項式の特別なものである（$a_1=e$，$i \neq 1$ のとき $a_i=0$）．

き，したがって同値類は環をなす．それを**商環**または**剰余類環**と呼び，$\Gamma[x]/R$ または $\Gamma[x]/(x^2+1)$ で表わす．Γ の異なる元は，それらの元と同一視することのできる異なる類に属す．各類はその類に属する異なる多項式を x^2+1 で割ったときの共通の余りである一次多項式 $\alpha x+\beta$ を含むものであり，多項式 x を含む類を i で表わせば，$\alpha x+\beta$ を含む類は $\alpha i+\beta$ である（正則性による）．x^2+1 と 0 は二つの同値な多項式であるから，$i^2+1=0$ が成立する．最後に，α と β がともに零でないときは，$\alpha+\beta i(\neq 0)$ は逆元 $\dfrac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$ をもち，したがってこの商環は確かに Γ と方程式 $x^2+1=0$ の解である元 i を含む体である（そして明らかにこれらの性質をもつより小さい体は存在しない）．

有理数体 Γ を実数体 P でおきかえると，コーシーによって改善されたこの純代数的な方法によって，複素数体 $\Omega=P(i)$ を構成できる．同様に -1 を完全平方数でない整数 d でおきかえることができ，いつでもこの方法によって，体 $\Gamma(\sqrt{d})=\Gamma[x]/x^2-d$ を構成することができる．特に純代数的な方法で $\sqrt{d}$ の形の無理数が定義できる．記号的添加という名称のつけられたこの方法を，どのようにして任意の代数的数の定義にまで拡張できるかがあとでわかるであろう．これからは環の中での加法と乗法に関して正則な同値関係の重要性に注目しよう．表現を簡単にしさらにこの概念の算術的起源に立ち返らせる意味でそれを**合同**と呼ぶことにする．

このようにして作られた体 $\Gamma(\sqrt{d})$ のうちで，簡単で注目すべき環について述べよう．それは有理整数 a,b，すなわち $a,b\in C$ に対する数 $a+b\sqrt{d}$ であり，特に $a+bi$ であるものはガウスの整数で，これらの数の環は平面上の《整数点の格子》，すなわち座標が整数である点からなるもので表現される．

ここでは可換環に制限しているにもかかわらず，環 A（体であってもよい）の元からなる n 次の正方行列は（加法と乗法の通常の規則をもつもの），$n>1$ のとき可換的でない環をなすことを注意しておく．

3. 整　　域

整域（または整環）は，その中での積 xy が零になるのは因数 x,y のうちの少なくとも一つが零であるときにかぎるような可換環 D である．すなわち，$D-\{0\}$ の二つの元の積はまた $D-\{0\}$ の中にあり，$D-\{0\}$ は《乗法に関して閉じている》．さらに，$ab=ac$ かつ $a\neq 0$ ならば，$b=c$ が成立し，したがって $D-\{0\}$ の中の $ab=ac$ で

ある形のすべての等式は簡約できる. $D-\{0\}$ の元が有限個のとき, その乗法の群表を作れば一つの元は各行と各列の中にせいぜい一回だけ, それもちょうど一回だけ現われることがわかる. これは方程式 $ax=b$ がつねにただ一つの解をもつことを意味し, したがって $D-\{0\}$ は乗法群をなす (もちろん可換群でもある). ゆえに D は体である, すなわちすべての有限整域は体である. p が素数のときの $C/(p)$ の場合がそうである.

D が有限整域でないときは, 分数 (a,b) または $\dfrac{a}{b}$ $(a,b\in D,\ b\neq 0)$ を考えることによって D を含む (最小の) 体を構成することができ, それは整域 D の**商体**または**分数体**と呼ばれる. この体のすべての元は同値な分数の類である[1].

K を (可換) 体とする. $x,y\in K$ で $xy=0,\ x\neq 0$ のとき, x は K の中で逆元 x^{-1} をもち, そして

$$0=x^{-1}(xy)=(x^{-1}x)y=y$$

が成立する.

したがって, Kの中に含まれるすべての環, 特別な場合として体 K 自身は整域である.

Dが整域のとき, 多項式環 $D[X]$ を考えると, 次数 $n\,(a_n\neq 0)$ の多項式 $f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ と次数 $p\,(b_p\neq 0)$ の多項式 $g(X)=b_0+b_1X+\cdots+b_pX^p$ との積は, a_nb_p は 0 でないから次数がちょうど $n+p$ の多項式 $a_0b_0+\cdots+a_nb_pX^{n+p}$ である. A が環のとき, 環 $A[X]$ の中の次数 n の多項式と次数 p の多項式との積は次数が高々 $n+p$ の多項式である. それは A が整域でないときは積の次数が低くなる場合が実際にあるからである. A が整域でないときの他の非常に注目すべきことは, $x=a$ と $x=b$ $(a,b\in A,\ b\neq a)$ に対して零となる多項式 $f(x)\in A[x]$ は $(x-a)(x-b)$ で割り切れるとは断言できないし, 次数 n の多項式 $f(x)$ が x の n 個より多くの異なる値に対しても零になりうるということである. たとえば, $A=C/(4)$ をとると, 次数 1 の多項式 $2x$ は $x=0$ と $x=2$ に対して零になる.

---

[1] H. カルタンの代数構造についての講義の第 7 節と第 8 節を参照せよ. D の中で単位元の存在は必要ではない ($\dfrac{1}{1}$ のかわりに分数 $\dfrac{m}{m}$, $\dfrac{a}{1}$ のかわりに $\dfrac{am}{m}$ とみなされるから). 整域の商体を構成することは, 与えられた可換半群 S (結合的, 可換的で, 乗法で表わされた簡約化の規則 $ab=ac$ ならば $b=c$ を満たす演算の与えられた集合である) を含む最も簡約で最も小さい群を構成することから導かれる. この構成の方法は自然数から有理整数を定義すること, または正の実数からすべての符号の実数を定義することへ応用できる興味がある. ただしこの場合の演算は加法とする. 〔2〕, 第 5 章, §2, §3, 224 ページ参照 (きわめて容易に, §1 の使用をまぬがれる).

4. 標　　数

Aを単位元eをもつ環，nを有理整数とする．nが正で，$x \in A$ のときは

$$nx = x + \cdots + x \qquad (n\text{倍})$$

ときめる．$n = 0\,(\in C)$ のときは，$0x = 0\,(\in A)$，nが負のときは

$$nx = -(|n|x)$$

ときめる．$x = ex$ であるから

$$nx = (ne)x$$

が成立する．したがって

（1）　$$ne = 0$$

であるような零でない整数nが存在するときは

すべての $x \in A$ に対して　$nx = 0$

が成立する．このような整数のうちで正のものが存在し，さらにそのうちで最小のものが存在する，それを n_0 とする．このとき環 A の標数は n_0 であるという．

方程式（1）を満足する整数nが存在しないとき，A の標数は0であるという（0がすべての $x \in A$ に対して $0e = 0$, $0x = 0$ となるようなただ一つの整数だからである）．

整域 D の標数は0か，または素数pである．実際，$n_0 = n_0'n_0''$ で $n_0', n_0'' \neq 0, 1$ であるならば，$n_0'e = a \neq 0$, $n_0''e = b \neq 0$ でかつ $ab = n_0e = 0$ となり，Dは整域ではない．

標数が $p \neq 0$ の整域のいくつかの興味ある特別の性質を調べよう．

任意の可換環で，二項定理

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ka^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

ここで　$${}_nC_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\,!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

が成立する．［可換的でない環では

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

としか書くことができない．］

二項定理で，対象としている整域Dの標数をpとし，$n = p$とする．$k \neq 0$, p に対して ${}_pC_k$ はpの倍数であるから

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

が成立する．aを $a - b$ でおきかえると

$$(a-b)^p = a^p - b^p$$

が得られる．これらの公式をつぎつぎに使って

$$(a_1+\cdots+a_r)^p=a_1^p+\cdots+a_r^p$$

$$(a+b)^{p^f}=a^{p^f}+b^{p^f} \qquad (f \text{ は任意の自然数})$$

$$(a-b)^{p^f}=a^{p^f}-b^{p^f}$$

が得られる．

Dが単位元をもつと仮定し，$a_1=a_2=\cdots=a_r=e$ とおき，re を r と書くと，任意の自然数 r に対して

$$r^p=r$$

が成立する．

この関係は特に mod. p の剰余類体 $C/(p)$ でも成立する．整数環 C の場合は，すべての自然数 x に対して

$$x^p \equiv x \quad (p)$$

が成立する（フェルマの定理）．

Aを任意の可換環とするとき，多項式環 $A[x]$ において，$f(x)$ の導関数を $f(x+h)$ を h のべき乗の順にならべたときの h の係数として純代数的に定義できる．すなわち

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2(\cdots), \qquad f(x+h)\in A[x,h].$$

導関数の計算の規則は容易に得られる．

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

ならば

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+\cdots+a_1$$

が成立し，$f'(x)$ の次数はせいぜい $n-1$ である．A が標数0の環のときは，次数はちょうど $n-1$ であり，A の標数が n_0 で，n が n_0 の倍数の場合は，f' の次数は確実に $n-1$ より小さい．A が単位元をもつ整域，または標数 p の体であるとき，x^p についての任意の多項式

$$f(x)=a_rx^{p^r}+\cdots+a_1x^p+a_0$$

の導関数は零である（《恒等的に零》という意味で）．このことがらは，代数方程式の理論においてさほどの混乱をひきおこさない．Aとして標数 p のある種の体をとるとき，それは $A[x]$ における $f(x)$ の既約性と両立する．例[1]：A を $k=C/(p)$ の中に係数をと

[1] たとえば，〔3〕159ページ参照．

る不定元 t の有理分数の体 $k(t)$ とし，そして $f(x)=x^p-t$ である場合.

5. イ デ ア ル

可換環 A において，R を合同とする(すなわち A の加法と乗法に関して正則な同値関係である). 同値類の集合または商集合 A/R は，代数構造についての 講義 でわかったように一つの環であり，これを簡単に $\overline{A}$ で表わす. Aの元 x を含む類を $\bar{x}$ で表わそう. 写像 $x\to\bar{x}$ は A から $\overline{A}$ の上への写像で ($\overline{A}$ の任意の元 $\bar{x}$ は A の少なくとも一つの元の像として得られる)，それは環 $\overline{A}$ と Aの加法と乗法を保存する. すなわち，

$$\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y},\quad \overline{xy}=\bar{x}\bar{y}.$$

この性質をもつすべての写像 $A\to\overline{A}$ を (環) **準同型写像**と呼ぶ. 環 $\overline{A}$ は A に**準同型**である，または A の**準同型の像**であるといい

$$A\sim\overline{A}$$

と表わす.

したがって A の中の任意の合同 R によって，準同型な環 $\overline{A}$ が得られ，それは商環 A/R にほかならない.

A の元 0 が属する合同類 $\overline{0}$ を考えよう. これは明らかに環 A/R の零元である. これはまたつぎの注目すべき二つの性質をもった A の部分集合 M である.

1° M は加法についての A の部分群である. 実際，M は定義より 0 を含んでおり，x, y とともに $x+y$, x とともに $-x$ を含んでいる. (より簡単に，M は x, y と同時に $x-y$ を含んでいるというだけで， ある群の部分群を特徴づける命題を使うことができる[1]).

2° $m\in M$, $a\in A$ のとき，$am\equiv a0=0\ (R)$ であるから M は A の中で乗法が許される.

R は加法に関して正則であるから， 関係 $x\equiv y\ (R)$ と，$x-y\equiv 0\ (R)$, すなわち $x-y\in M$ とは同時に真である. したがって零-類 M がわかれば， それによって R が得られる.

性質 1° と 2° をもった可換環 A のすべての部分集合を**イデアル**と呼ぶ. 前に述べたこ

---

[1] 乗法で表わされた群 G の部分集合 H が部分群をなす条件は，H の任意の二元 a, b とともに，元 ab^{-1} もまた H に含まれることである. [訳注]

とから，一つの合同に関してのすべての零-類はイデアルである．しかも，逆に，あらかじめ A の中に一つのイデアル M を与え，そして $x-y \in M$ であるような A の元 x, y の対に対して，それらにだけ成立する関係 R を考えると，R は同値関係でありかつこの関係は加法と乗法に対して正則である．したがって R は合同であり，その零-類は M と一致する．

したがって，合同 R と可換環 A のイデアル M との一対一対応が得られた．この理由から，商環 A/R またはた A/M と書かれる．

今度は環の準同型

$$A \to \overline{A}$$

から出発しよう．この場合 A の元 x の像は $\overline{A}$ の元 $\bar{x}$ である．A の元 x, y についての関係で $\bar{x}=\bar{y}$ であるような対 (x, y) に対して，それらにだけ成立するものを考える．R は同値関係であり（**準同型の同値**と呼ばれる），そしてこれは合同であることが容易に証明される．そこで商環 A/R を作ることができ，そしてその作り方から同値関係 R による類，すなわち A/R の元は $\overline{A}$ の元に一対一に対応する．この対応は加法と乗法を保存するから同型である．ゆえに $\overline{A}$ は商環 $A/R=A/M$ に同型である．イデアル M，すなわち R を法とする零の類はここでは $\overline{A}$ の零の上に準同型写像で移る A の元の集合である（M は準同型写像の**核**と呼ばれる）．

したがって同型の違いを除いて，合同，または同じことになるが A のイデアルによって A に準同型なすべての環が得られる．

6. 特別な場合と例

可換環 A のイデアル上に，共通部分（集合の理論の意味での）または L. C. M.，和または G. C. M.，それに積という演算を定義する．A の二つのイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ の元 a と $\mathfrak{b}$ の元 b との和である元 $a+b$ からなる集合であり，これは明らかに $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を含むイデアルである．積 $\mathfrak{ab}$ は積 ab によって生成されるイデアル，すなわち，和 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_rb_r$（$r$ は固定されていない）の集合である．ここで $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$ である．整除といったほうが適切であるが，イデアルの商を定義したりするイデアルの計算については，本当は非常に重要ではあるが[1]，ここの説明を活気なくしないためにこれ以上

[1] 〔3〕70ページ参照．

あまりふれないことにする．

基本的な生成の仕方を調べるだけにしよう．すこし簡単にするために，環 A は単位元 e をもつと仮定する．

環 A の中で h 個の固定した元 $a_1, \cdots, a_h$ が与えられているとき，x_i を A 全体に走らせると元 $a = x_1a_1 + \cdots + x_ha_h$ の集合は，一つのイデアル $\mathfrak{a}$ をなすことが容易に証明される．それを

$$\mathfrak{a} = (a_1, \cdots, a_h)$$

と表わす．$\mathfrak{a}$ は a_i によって生成されるといい，それは（有限）**基底** $a_1, a_2, \cdots, a_h$ をもつという．ただ一つの元によって生成されるイデアル $\mathfrak{a} = (a)$ は**単項イデアル**と呼ばれる．単位元によって生成されるイデアル (e) は環 A と一致し，しばしばそれは**単位イデアル**と呼ばれる．元 0 より生成されるイデアルはこの元自身になり，それを**零イデアル**と呼ぶ．

体 K においては，零イデアルと単位イデアル以外にイデアルは存在しない．実際，M を K のイデアルであるとし，$M \neq 0$ と仮定する．ところで M は少なくとも一つの元 $a \neq 0$ を含むから，この元 a は逆元 a^{-1} をもち，K は体であるから $e = a^{-1}a \in M$ が成立する．したがって $K = (e)$ は M に含まれる，ゆえに $M = K = (e)$.

整数環 C，または係数を体 k の中にとる x についての多項式環 $k[x]$ においては，すべてのイデアルは単項イデアルである．

例として環 $A = k[x]$ の場合についてこれを証明しよう．零イデアルは確かに単項イデアルである．そこで $\mathfrak{a}$ がイデアル $\neq (0)$ であるときは，f を $\mathfrak{a}$ に属する零でない最低次数の多項式とし，g を $\mathfrak{a}$ に属する任意の多項式とする．g を f で割ると $g = qf + r$, ここで r の次数は f の次数よりも低い．そして多項式 r はイデアル $\mathfrak{a}$ に属すから，当然零であり，したがって g は単項イデアル (f) に属す，ゆえにこれは $\mathfrak{a}$ と一致する．

整数環 C に対しての類似の推論で，この環の中には法 m によって定義された算術的合同以外の合同は存在しないし，m はその合同にともなう単項イデアルの生成元であることがわかる．

割り算の計算法が存在するような環を**ユークリッド環**と呼ぶ．ある環においてすべてのイデアルが単項であるとき，その環を**単項イデアル環**（簡単に，**主環**ともいう）と呼ぶ．前の推論を拡張して，すべてのユークリッド環は主環であることが容易にわかる．ガウスの整数の環はユークリッド環である（割り算を定義するために，元 $\alpha = a + ib$ のノルム $N(\alpha)$ を用いると，それは定義により $N(\alpha) = a^2 + b^2$ であり，それに対して一つの不定

元をもった多項式の割り算での次数と同じ役割をさせる)[1].

二つ以上の不定元をもった多項式環 A, たとえば $\Gamma[x, y]$ や $\Omega[x, y]$ のような環はもはや主環ではない. 実際, イデアル (x, y) はただ一つの生成元をももたない. このイデアルは簡単な幾何学的な意味をもっていることに注意しよう. すなわち, これは原点で零となる A の多項式の集合である. しかしながら K が体であるときは, n 個の変数をもった多項式環 $K[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアルの生成は, このような環においてはすべてのイデアルは有限個の基底をもつという単純な法則に従う. この性質をもつ環は**ネーター環**と呼ばれる(これは数学者 E. ネーター女史の名前によるもので, 彼女はこれに《極大条件》と《約鎖律》の方法で公理的に別な定義を与え, このようなイデアルの理論についての基本的な結果を与えた).

いま述べた環 $K[x_1, \cdots, x_n]$ がネーター環であるという定理はヒルベルトによるものである. ヒルベルトの定理はより正確には, 《移行の定理》の形をとっている. すなわち, 単位元をもつ環 A がネーター環ならば, 環 $A[x]$ も同様にネーター環である[2].

7. 注目すべきイデアル

可換環 A のイデアル M のうちで, それに対する商環または剰余類環 A/M が特別な性質をもっているものに着目するのは当然である. A/M が体または整域である場合を調べよう.

M を真に含むイデアルが A ただ一つであるとき, M は**約イデアルをもたない**, または**極大イデアル**と呼ばれる.

A/M が体であるためには, イデアル M が約イデアルをもたないことが必要である. A が単位元をもつときは, この条件は必要十分である.

証明.　1° A/M が体であると仮定する.

M' を M を真に含むイデアルとする, すなわち $M \subset M'$. a を $a \in M'$, $a \notin M$ であるとする. a を含む類を $\bar{a}$ で表わすと, $\bar{a}$ は零の類 $M = \overline{0} \in A/M$ と異なる. x を A の任意の元, $\bar{x}$ を x を含む類とすれば, $\bar{x} = \bar{a}\bar{y}$ であるような $\bar{y}(=\bar{a}^{-1}\bar{x})$ が存在する. したがって y は

---

[1] 〔3〕77 ページ参照. [訳注]

[2] たとえば, "現代数学概説 I" (岩波書店), 185 ページ参照. [訳注]

$$x \equiv ay \quad (M)$$

すなわち，　$x = ay + m, \quad m \in M \subset M'$

であるような類 $\bar{y}$ に属する A の元を表わしている．$a \in M'$ であるから，$x \in M'$ が成立し，したがって $A = M'$ であり，M は約イデアルをもたない．

2° A は単位元 e をもち，かつ M は約イデアルをもたないと仮定する．A/M が体であることを示すには，$\bar{0} = M$ と異なるすべての類 $\bar{a}$ が逆元をもつことを証明すれば十分である．類 $\bar{a}$ の元 a は M に属さないし，イデアル $M + (a)$ は M を真に含むから，したがって

$$M + (a) = A.$$

特に，単位元 e は右辺に属するから

$$e = m + ra, \qquad m \in M, \ r \in A$$

である．これを mod. m の類にもっていくと

$$\bar{r}\bar{a} = \bar{e}, \ \text{すなわち} \ \ \bar{r} = \bar{a}^{-1}.$$

この結果の重要な応用はつぎの場合である．体 K と，環 $K[x] = A$ の既約な多項式 $f(x)$，すなわち次数が少なくとも 1 である同じ環の二つの多項式の積にはならないような多項式を考えよう．A の中の単項イデアル (f) は約イデアルをもたないから，$A/(f)$ は体 K' である．K の元を含む類と K の元は一対一に対応する．なぜなら K の二つの異なった元は mod. f で合同ではないからである．したがってこれらの類は K に同型な体をなし，それを K と同一視すると K' は K の部分体である．

α を多項式 x を含む類とすれば，$f(\alpha)$ を含む類は多項式 $f(x)$ を含む類である［準同型 $A \sim A/(f)$ によって］．しかし $f(x)$ を含む類は K' の零元であり，したがって，K' の中で $f(\alpha) = 0$ が成立する．よって方程式 $f(x) = 0$ がその中で少なくとも一つの根をもつような体 K' を構成できた．これは本質的には記号的添加の方法である．

環 $A/\mathfrak{p}$ が整域であるとき，環 A のイデアル $\mathfrak{p}$ は**素イデアル**であるという．$\mathfrak{p}$ が素イデアルであるためには，$A/\mathfrak{p} = \bar{A}$ において，関係

$$\bar{x} \neq \bar{0}, \ \bar{y} \neq \bar{0} \quad \text{ならば} \quad \bar{x}\bar{y} \neq \bar{0}$$

が成立することが必要十分である．

したがって A において関係

$$x \notin \mathfrak{p}, \ y \notin \mathfrak{p} \quad \text{ならば} \quad xy \notin \mathfrak{p}$$

が成立する．これは$\mathfrak{p}$の補集合 $A-\mathfrak{p}$ が乗法に関して閉じていることである．

素イデアルのこの概念は，代数学自身の理論においても算術または幾何学の応用においても非常に重要である．

単位元をもつ環Aにおいて，約イデアルをもたない任意のイデアルMは素イデアルである（A/M は体であるから整域である）ことを述べるだけにする．

最後に，例として，複素係数をもつ三つの変数の多項式環 $\Omega[x, y, z]=A$ をとり，そのイデアル

$$\mathfrak{a}_1=(x, y, z), \quad \mathfrak{a}_2=(x, y), \quad \mathfrak{a}_3=(x)$$

を考えよう．$A/\mathfrak{a}_1$ は Ω に同型であり，したがって体である．$A/\mathfrak{a}_2$ は多項式環 $\Omega[z]$ に同型で，整域である．$A/\mathfrak{a}_3$ は多項式環 $\Omega[y, z]$ に同型で，これはまた整域である．イデアル $\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_2$，$\mathfrak{a}_3$ は包含関係

$$\mathfrak{a}_3 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1 \subset A=(1)$$

を満足し，すべて素イデアルであり，$\mathfrak{a}_1$ は約イデアルをもたない．

参考文献

〔1〕 N. ブルバキ —— 代数 1（東京図書）．
〔2〕 P. Dubreil —— *Algèbre*, t. I, 2e éd（Gauthier-Villars, Paris, 1954）．
〔3〕 B. L. ファン・デル・ヴェルデン —— 現代代数学（全3巻）（東京図書）．

線型空間．線型形式と線型方程式

ソルボンヌ大学教授

G. ショケ

ベクトルの概念は中等教育のいろいろな場面にでてくる．平行移動や速度や力の合成，スカラー積，ベクトル積，ある点に関してのベクトルのモーメント，ついでずっとあとで多項式に関して非常に控えめな代数的な形で線型形式が扱われる．ベクトルという言葉はいつも同じ意味で用いられてはいない．それは，あるときは束縛ベクトル，あるときは回転の向きのつけられたベクトル（回転の向きのつけられた 面積 のようなもの），あるいは自由ベクトルであったりする．

ここでは自由ベクトルだけを扱う．

一般的に用いられている幾何学的イメージ，すなわち一方の端に矢印のついた線分は，ほかのベクトルの考慮からまったく離れて，孤立した一つのベクトルとして扱うことができると思いこませてしまうけれども，数学的存在でベクトルと呼ぶことのできるものは，これから明確にするいくつかの演算をその上で行なうことができるような，類似なものの集合にそれが属するときだけであるということが容易にわかるであろう．

ベクトルの資格を与えるものは演算の性質であって，それらのものそれぞれの個性ではない．したがって多項式，連続関数，正方形などにベクトルの資格が与えられるかもしれない．

おおまかにいって，数学的な存在の集合がベクトルの集合であるといえるのは，その二つのベクトルを加えることができ，かつすべてのベクトルに任意の数を掛けることができるときである．

より正確に，つぎの定義を与えよう．

定義．　つぎの条件を満たすすべての集合 E を，実数体 R 上の**線型空間**（または，

ベクトル空間）という．

1）加法と呼ばれる内算法[1]が与えられており，それに関して E は可換群である．

2）任意の数 $\lambda \in R$ と任意の $\boldsymbol{x} \in E$ に対して $\lambda\boldsymbol{x}$ で表わされる E の元を対応させる，つぎの条件を満たす外算法が与えられている．

a)　$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$

b)　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$

c)　$\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$

d)　$1\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

E の元は**ベクトル**，R の元は**スカラー**と呼ばれる．もちろん同じ元ではないのだが，R の 0 と群 E の零元を同時に $\boldsymbol{0}$ で表わす．

関係 a)，b)，c)，d) から容易につぎの関係が導かれる．

$$0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}, \quad (-\lambda)\boldsymbol{x} = \lambda(-\boldsymbol{x}) = -\lambda\boldsymbol{x}.$$

関係 a)，b)，c)，d) は単に R 上に加法と乗法が存在することに関係している．したがって前の定義の中で R と同じ働きをする環 A 上の線型空間も同様に定義できそうに思われる．実際には，この環が体であるときだけ，R 上の線型空間と類似な理論が得られる．これは A が体のときは，$\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ならば $\lambda=0$ または $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ であるという関係が成立し，A が単に環であるときは必ずしもこの関係が成り立たないことに原因している．

最も使われる体は R と複素数体 C である．

体 R が順序構造をもっているということは前の定義の中にははいっていない．それに（R 上の）線型空間の中で半直線，または区間の概念を定義するときにだけ必要であり，そのときは E の中の凸集合を扱うことができる．これによって R 上の線型空間に特別な役割が与えられることになる．ここでは半直線と凸の概念についてはふれない．

線型空間の例

1）n 個の実数の列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の集合は

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$
$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

---

[1] H. カルタンの代数構造についての講義を見よ．群 E が可換群のとき，x と y の結合を $x+y$，x の対称元（反元）を $-x$ と書く．

と定義することによって R 上の線型空間である．

この空間はユークリッド空間 R^n である．

特に $n=1$ の場合，R 自身を線型空間と考えることができることが示される．

2) $[0,1]$ 上で定義された実数値関数の集合は，$h=f+g$ と $k=\lambda f$ を式

$$\begin{cases} h(x)=f(x)+g(x) & (\text{すべての } x\in[0,1] \text{ に対して}) \\ k(x)=\lambda f(x) & (\text{すべての } x\in[0,1] \text{ に対して}) \end{cases}$$

で定義するとき，R 上の線型空間である．

この空間のつぎの部分集合についても同様である．

$[0,1]$ 上の連続関数の集合

$[0,1]$ 上の無限回微分可能な関数の集合

多項式の集合（または n 次の多項式の集合）

三角多項式[1] の集合，等….

3) 複素平面 C において正則な解析関数の集合は体 C 上の線型空間である．

ある集合が線型空間であるかどうかはいつでも容易にわかるとはかぎらない．たとえば $[0,1]$ 上の連続関数でその表わす曲線が有限の長さをもつものを考えよう．このような二つの関数の和が同じ性質をもつことは簡単にはわからない．同様に，E を実数の無限列 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ で

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\cdots<+\infty$$

を満たすものの集合とする．このような二つの列の和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$ がまた同じ性質の列であるかどうかも簡単にはわからない．

同型写像の概念

E を実係数の次数 $<n$ の多項式の線型空間とする．$p=(a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n)$ が E の多項式のとき，これは係数の列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ によって特徴づけられ，したがって

$$p\leftrightarrow(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

で定義される E と R^n のあいだの一対一対応が存在する．この対応は加法とスカラーによる乗法を保存する．ゆえに E と R^n を同じ代数構造の二つの異なる実現であると考えることができ，これをこれらの空間は同型であるといい表わす．より一般的に，

---

[1] $a_0+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，ここで a_n，b_n は実数である．［訳注］

定義.　E と E' を同じ体上の二つの線型空間とする．E から E' への一対一写像 f で，任意の $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{\lambda}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \quad \text{かつ} \quad f(\boldsymbol{\lambda x})=\boldsymbol{\lambda} f(\boldsymbol{x})$$

を満たすものを E から E' 上への**同型写像**という．

E' から E の上への逆写像 f^{-1} も同じ性質をもつことはただちにわかる．

このような同型写像 f が存在するとき，E と E' は同型であるという．

条件 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$ から，すべての有理数 $\boldsymbol{\lambda}$ に対して

$$f(\boldsymbol{\lambda x})=\boldsymbol{\lambda} f(\boldsymbol{x})$$

が導かれることを注意しよう．しかしこの関係をすべてのスカラー $\boldsymbol{\lambda}$ に対して導くことはできない．したがって第二の関係も欠くことのできないものである．

同 型 写 像 の 例

1)　E を線型空間，$\boldsymbol{\lambda}$ をスカラー $\neq 0$ とする．写像 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\lambda x}$ は E からそれ自身の上への同型写像である．これを中心 O，倍率 $\boldsymbol{\lambda}$ の**倍写像**と呼ぶ．

2)　E_1 を $[0,1]$ 上の連続な実数値関数の線型空間，E_2 を $[0,1]$ 上で連続微分可能で，$x=0$ で零である実数値関数の線型空間とする．解析学の初等的な定理よりこれら二つの空間は同型であるという結果が得られる[1]．

3)　R^2 上で定義されたすべての線型関数は $(a_1x_1+a_2x_2)$ の形である．よってこれらの関数の集合は R^2 に同型な線型空間であることがただちにわかる．

4)　$[0,1]$ 上で連続な実数値関数の空間は，$x \to +\infty$ および $x \to -\infty$ のとき有限の極限値に収束するような $]-\infty,+\infty[$ 上で連続な実数値関数 f からなる空間に同型である[2]．

5)　R 上の周期が 1 の連続な実数値周期関数の空間は円周上で定義された連続な実数値関数の空間に同型である[3]．

---

[1]　E_1 の任意の連続関数 $f(x)$ に対して，$\int_0^x f(t)dt$ を対応させることによって E_1 と E_2 の同型が得られる．［訳注］

[2]　変数変換 $x=-\cot \pi t$ によって，$0 \leqslant t \leqslant 1$ と $-\infty<x<+\infty$ が一対一連続に対応できる．［訳注］

[3]　変数変換 $2\pi x=t$ によって，x に対して動径の回転角が t である円周上の点を対応させればよい．［訳注］

線型空間の積

R から R^n を定義するために用いた方法は一般化でき，それによって既知の空間から新しい空間を構成することができる.

たとえば，E_1 と E_2 を R 上の二つの線型空間とし，$\boldsymbol{x}_1 \in E_1$，$\boldsymbol{x}_2 \in E_2$ の対 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ の集合を $E_1 \times E_2$ で表わす. $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$，$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ のとき，

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2), \qquad \lambda\boldsymbol{x} = (\lambda\boldsymbol{x}_1, \lambda\boldsymbol{x}_2)$$

とおく. これらの演算の与えられた空間 $E_1 \times E_2$ は R 上の線型空間となり，これを E_1 と E_2 の積という.

同様に，線型空間の任意の有限個の族の積，さらにはこのような空間の無限個の族の積も定義できる.

例.　1）R^2 上で定義された実数値関数 $h(x_1, x_2)$ で，$h(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ でかつ $h(0, 0) = 0$ を満たすものからなる線型空間は，R 上で定義された $f(0) = 0$ であるような実数値関数 f の空間の平方に同型である.

2）$[0, 1]$ で連続微分可能な実数値関数の空間は R と $[0, 1]$ 上で連続な実数値関数の空間との積に同型である.

部分線型空間. 部分集合から生成される部分空間

R^3 の中で，$\boldsymbol{0}$ にならない部分線型空間は原点を通る直線と平面である.

一変数の多項式の空間において，n 次の多項式の集合，与えられた一つの多項式で可約な多項式の集合，偶数次の項からなる多項式の集合はすべて部分線型空間である. より一般的に，

定義.　E を線型空間とする. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in A$ かつ任意のスカラー λ に対して $\lambda\boldsymbol{x} \in A$ が成り立つような E のすべての部分集合 A を E の**部分線型空間**という.

E のすべての部分線型空間は E の部分加群であることはただちにわかる.

また，$(A_i)_{i \in I}$ が E の部分線型空間であるとき，すべての A_i に共通な元の集合，すなわちそれらの共通部分はまた E の部分線型空間である.

特に，X を E の任意の部分集合とする. X を含む E の部分線型空間が存在し，たとえば E 自身はいつでもそうである，これらの共通部分 $A(X)$ は X を含んでおり明らかに X を含む E の最小の部分線型空間である. $A(X)$ を X によって生成された線型空間とい

う.

新しい概念を導入して $A(X)$ の元の性質を明らかにしよう.

定義.　X を線型空間 E の部分集合とする. X の元の有限族 $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in I}$ とスカラー λ_i に対して, $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in I}\lambda_i \boldsymbol{x}_i$ で表わされるすべての E の元を X の元の**線型結合**と呼ぶ.

X の元の任意の線型結合は X を含むすべての部分線型空間に属す. したがって, 特に $A(X)$ に属する. 一方, これらの線型結合は明らかに E の部分線型空間を形成し, この部分空間は X を含んでいる. したがってまた $A(X)$ を含む. 他方, それは $A(X)$ に含まれているから, それらは一致する. すなわち,

E の部分集合 X から生成された部分空間 $A(X)$ は X の元の線型結合の集合と一致する.

例.　E を R 上で定義された実数値関数の空間とする. X を単項式 $1, x, \cdots, x^n, \cdots$ で構成された E の部分集合とする. X から生成された空間 $A(X)$ はすべての多項式の集合である.

補 部 分 空 間

R^3 において, $\mathbf{0}$ を通る平面と $\mathbf{0}$ を通る直線で $\mathbf{0}$ だけでしか交わらないものは補部分空間の例である.

定義.　空間 E の二つの部分空間 X_1 と X_2 が**補部分空間**であるというのは, E のすべての点 $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \qquad \text{ここで } \boldsymbol{x}_1\in X_1,\ \boldsymbol{x}_2\in X_2$$

の形で, しかもただ一通りに表わされるときである.

この条件は $(X_1\cup X_2)$ が E を生成し, $X_1\cap X_2$ が一点 $\mathbf{0}$ であるということになる. 証明は容易である.

$\boldsymbol{x}_1$ は $\boldsymbol{x}$ の E_1 における成分である, または $\boldsymbol{x}_1$ は $\boldsymbol{x}$ の E_1 上への E_2 に平行な射影であるという.

$\boldsymbol{x}_1=\mathrm{pr}_1.\,\boldsymbol{x}$ と書けば, 式

$$\mathrm{pr}_1.\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\mathrm{pr}_1.\,\boldsymbol{x}+\mathrm{pr}_1.\,\boldsymbol{y}, \qquad \mathrm{pr}_1.\,(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\,\mathrm{pr}_1.\,\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

例．　1)　E が実係数の x の多項式の集合，X_1 が (x^2+1) で可約な多項式の集合，X_2 が高々次数 1 の多項式の集合である場合．

2)　E が R 上の実数値関数の空間，X_1 が偶関数 $(f(-x)=f(x))$ の部分空間，X_2 が奇関数 $(f(-x)=-f(x))$ の部分空間である場合．

空間 R^3 において，一つの平面の補部分空間はすべて直線である，すなわち補部分空間はすべて同型である．これはつぎの一般的な命題の特別な場合である．

命題．　線型空間 E において，X_2 と X_2' が同じ部分空間 X_1 の二つの補部分空間であるならば，X_1 に平行な射影は X_2 と X_2' のあいだの同型写像を定義する．

実際，すべての $\boldsymbol{x}_2' \in X_2'$ に対して，$\boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1$ が成り立つ．ここで $\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_2'$ の X_2 上への X_1 に平行な射影である．しかしこの等式はまた $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2' + (-\boldsymbol{x}_1)$ と書かれる．よって $\boldsymbol{x}_2'$ は $\boldsymbol{x}_2$ の X_2' 上への X_1 に平行な射影でもある．

この写像 $\boldsymbol{x}_2 \to \boldsymbol{x}_2'$ は，したがって X_2 から X_2' の上への一対一写像である．これは射影であるから，

$$(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2)' = \boldsymbol{x}_2' + \boldsymbol{y}_2', \qquad (\lambda \boldsymbol{x}_2)' = \lambda \boldsymbol{x}_2'$$

が成立する．よってこれは確かに同型写像である．

1. 線型独立．基底

線型独立の概念は，幾何学では R^3 のベクトルを与えられた三つのベクトルに比例するベクトルに分解する場合，また代数学では連立一次方程式が解けるための条件を調べる場合にでてくる．いままでに述べてきたベクトルのいろいろな性質とは関係なく，また特別な座標系を導入しないでそれを調べる方法を説明しよう．

定義．　線型空間 E の元の有限族 $(\boldsymbol{a}_i)_{i \in I}$ が自由であるとは，関係 $\sum_{i \in I} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ が成り立つときは，つねにすべての i に対して $\lambda_i = 0$ であるときである．

ある族が自由であるというのは，そのすべての有限部分族が自由であるときである．

自由でない族は束縛されているという．

一つの族が束縛されているならば，少なくとも一つが 0 でない（それを $\lambda_0 \neq 0$ とする）

λ_i に対して $\sum_{i\in J}\lambda_i \boldsymbol{a}_i=0$ の形の式が存在する．これより $\boldsymbol{a}_0=\sum_{i\in J-0}\mu_i\boldsymbol{a}_i$ が得られ，逆にこのような関係が成り立つとき，その族は束縛されている．よって，

ある族が束縛族であるということは，それらの元のうちの一つが他の元の線型結合になっていることである．

自由族の元は**線型独立**であるといわれ，束縛族の元は**線型従属**であるといわれる．

同様に，線型空間の自由部分集合，束縛部分集合の概念を定義できる．

例.　R 上の実数値関数の空間において，単項式の列 $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ は自由であり，列 $\sin x, \cdots, \sin nx, \cdots$ も同様である．

基底の定義.　線型空間 E の基底とは，E を生成する E のすべての自由部分集合のことである．

$B=(\boldsymbol{a}_i)_{i\in I}$ が E の一つの基底であるとき，すべての $\boldsymbol{x}\in E$ は $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in I}x_i\boldsymbol{a}_i$ の形でただ一通りに表わされる．ここですべてのスカラー x_i はそのうちの有限個を除いて零である．x_i は添数 i の $\boldsymbol{x}$ の**座標**と呼ばれ，$x_i\boldsymbol{a}_i$ は添数 i の $\boldsymbol{x}$ の**成分**と呼ばれる．

たとえば，R^n の中で，x_j のうちの一つだけが 1 で他はすべて 0 であるような $\boldsymbol{x}=(x_j)$ からなる n 個の元 $\boldsymbol{a}_i$ の集合は一つの基底である．多項式の空間において，単項式 $1, x, \cdots, x^n, \cdots$ の集合は一つの基底になる．

任意の線型空間は少なくとも一つの基底をもつことが証明される．ここでは有限次元の空間に対してだけ証明する．

有限次元の空間の基底

空間 E が有限次元であるというのは，E がそれを生成する有限個の元の部分集合（すなわち生成元が有限個の系）を含むときである．

これらの空間の研究はつぎの二つの定理によってなされる．

定理 1.　G が線型空間 E の生成元の有限系，L が G の自由部分集合であるとき，$L\subset B\subset G$ であるような E の一つの基底 B が存在する．

$L=L_0$ とおき，G の自由部分集合 L_p が定義されていると仮定しよう．もしも L_p が E を生成しないならば，L_p の元の線型結合ではない G の元 $\boldsymbol{x}_{p+1}$ が存在する．G の部分

集合 $L_p \cup \{\boldsymbol{x}_{p+1}\}$ は明らかに自由であり，これを L_{p+1} と表わそう．

すると $L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_p \subset L_{p+1}$ が得られるから，この列は真に増加である．$L_p \subset G$ で G は有限であるから，この列は有限であり，よって後続の L_{n+1} がないような L_n が存在する．すなわち，L_n は E を生成する，よって L_n が求める基底 B である．

定理 2.　G が E の生成元の有限系，L が E の自由部分集合（必ずしも G に含まれていなくともよい）であるとき，L を含みかつ $G \cup L$ に含まれている E の基底 B が存在する．

これは前の定理の自由部分集合 L と生成元の系（$G \cup L$）への直接の応用である．特に E の生成元のすべての有限系は一つの基底を含む．

したがって，有限次元のすべての空間は有限基底をもつ．しかしながら，このような空間は無限基底をもつことができないということは明らかではないが，これは正しい．より正確には，定理 2 と帰納法によって，有限次元の空間においてすべての基底は有限個でありかつ同数の元からなることが証明される．

この共通の数がその**空間の次元**と呼ばれる．この結論は任意の体 K 上の線型空間 E に対して成立することを注意しよう．しかしこの体を明確にしておくことが重要である．実際，E を体 C 上の n 次元の空間とすると，この空間 E はまた体 R 上の線型空間と考えることができ，するとその次元はもはや n 次元ではなく，$2n$ である．たとえば，C は C 自身の上では 1 次元であるが，R 上では 2 次元である．

これらの結論から豊富な結果が直接得られるが，そのうちで最も重要なものを列挙しよう．

1）R 上の有限次元の二つの線型空間 E と E' が同型であるためには，それらの次元が等しいことが必要十分である．特に，n 次元のすべての空間は R^n に同型である．

2）E が n 次元線型空間であるとき，

a）E の生成元の任意の系は少なくとも n 個の元をもち，しかもちょうど n 個の元をもつとき，それは基底である．

b）E の任意の自由部分集合は高々 n 個の元をもち，しかもちょうど n 個の元をもつとき，それは基底である．

c）E の任意の部分線型空間 V は高々 n 次元であり，しかも n 次元であるとき，それは E に一致する．

d)　E と異なる E の任意の部分空間は補部分空間をもつ．二つの補部分空間の次元の和は n に等しい．

2. 線 型 写 像

線型関数の概念は，古典解析学においても現代解析学においても，解析学を支配している概念の一つである．それは線型空間の領域の中だけですべての意味をもつものである．

定義.　E と F を同じ体 K 上の線型空間とする．つぎのような E から F への任意の写像 f を E から F への**線型写像**と呼ぶ．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ と $\boldsymbol{\lambda} \in K$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(\boldsymbol{\lambda x}) = \boldsymbol{\lambda} f(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

たとえば，E から F の上への同型写像は E から F の上への一対一線型写像にほかならない．

線型写像の例

1)　E を線型空間 E_1, E_2, …, E_n の積とする．E の任意の $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_i)$ に対して，E から E_i の上への写像 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_i$ は線型である．

2)　X_1 と X_2 が空間 E の二つの補部分空間であるとき，E から X_1 の上への写像 $\boldsymbol{x} \to \mathrm{pr}_1.\boldsymbol{x}$ は線型である．

3)　P_n を一変数の n 次の多項式 $p(x)$ の線型空間とする．$f(p)$ で p の n 次の項を表わすとき，P_n から P_n への写像 f は線型である．

4)　E を $[0,1]$ 上で微分可能な実数値関数 $x(t)$ の空間とし，x' を関数 x の導関数とする．

a)　E から R への写像 $x \to x'(0)$ は線型である．

b)　E から $[0,1]$ 上の実数値関数の空間への写像 $x \to x'$ は線型である．

5)　E を $[0,1]$ 上の連続な実数値関数の空間とする．

a)　x に対して $X(t) = \int_0^t x(u)du$ によって定義される X を対応させる E から E への写像は線型である．

b)　E から R への写像 $x \to \int_0^1 x(u)du$ は線型である．

6)　E を円板の平面 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 上で連続な実数値関数の空間，F を同じ円板の円周

上で連続な実数値関数の空間とする．

E の元 φ に対して φ のその円周上への制限を対応させる E から F への写像は線型である．

直接得られる性質．　それらの性質のうちで最も重要なものだけを述べよう．

1)　推移性．f を E の F への写像，g を F の G への写像とすると，$h(x)=g(f(x))$ で定義される写像 $h=g\circ f$ は f と g が線型であるときは，また線型である．

2)　f が E から F への線型写像であるとき，E の像 $f(E)$ は F の部分線型空間であり，F の任意の部分線型空間 V の逆像 $f^{-1}(V)$ は E の部分線型空間である．

線型写像の階数

E の像 $f(E)$ の次元を E から F への線型写像 f の**階数**と呼ぶ．この階数はしばしばつぎの命題によってきめることができる．

命題．　f の階数は $f^{-1}(0)$ の E における補部分空間の次元に等しい．

実際，G を $f^{-1}(0)$（これは $f(x)=0$ の根の集合にほかならない）の補部分空間とする．

すべての $\boldsymbol{x}\in E$ に対して，ただ一通りの分解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1$ が成立する，ここで $\boldsymbol{x}_0\in f^{-1}(0)$ かつ $\boldsymbol{x}_1\in G$ である．

$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+f(\boldsymbol{x}_1)=f(\boldsymbol{x}_1)$ が成り立ち，よって $f(G)=f(E)$ である．

しかるに，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外のすべての $\boldsymbol{x}\in G$ に対して $f(\boldsymbol{x})\neq 0$ である．したがって f の G への制限は G から $f(E)$ の上への一対一写像である．ゆえに，この制限は G と $f(E)$ のあいだの同型写像である．これで命題が証明された．

系．　線型写像はけっして次元を高くしない．E が有限次元のとき，$f(E)$ が E と同じ次元をもつためには，f が一対一であることが必要十分である．

この系はある種の連続写像は次元を増すので[1]，すべての連続写像がもつとはかぎらない線型写像の重要な性質を強調している．

生成元の系の像

f を E から F への線型写像，X を E の部分集合とする．

---

[1] たとえばペアノ曲線の場合である．ペアノ曲線についてはあとにでてくる H. カルタン "次元の概念について" の講義を参照．［訳注］

$f(X)$ が X によって生成される空間 $A(X)$ の像 $f(A(X))$ を生成することはただちにわかる．それで X が E を生成するときは，f はそれの X への制限によって完全に特徴づけられることがわかる．特に，X が E の基底であるときは，f はこの基底のすべての元 $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ を知ることによってきまる．

3. 線型形式．線型空間の双対空間

E から K へのすべての線型写像を（体 K 上の）線型空間 E 上の**線型形式**と呼ぶ．

E 上の線型形式の集合はつぎの定義によって自然に（K 上の）線型空間の構造が与えられる．

f と g を二つの線型形式とする．つぎの式によって線型形式 $h=f+g$ と $k=\lambda f$（ここで $\lambda\in K$）を定義する．

すべての $\boldsymbol{x}\in E$ に対して，

$$h(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})\quad \text{および}\quad k(\boldsymbol{x})=\lambda f(\boldsymbol{x}).$$

この線型空間を E の**双対空間**と呼び，それを E^* で表わす．

すべての $\boldsymbol{x}'\in E^*$ に対して，$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x})$ はスカラーであり，それを一般に $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle$ と表わす．

固定した任意の $\boldsymbol{x}'$ に対して，$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle$ は E 上の線型形式である．固定した任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle$ は E^* 上の線型形式である．$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle$ は $E\times E^*$ 上で定義された**標準的双線型形式**であるともいう．

座標形式．双対基底

ここでは有限次元の空間の研究に制限しよう．

E を n 次元線型空間，$(\boldsymbol{a}_i)_{i\in I}$ を E の一つの基底とする．E の任意の元 $\boldsymbol{x}$ はただ一通りに $\boldsymbol{x}=\sum \xi_i\boldsymbol{a}_i$ の形で表わされる．

E から K への写像 $\boldsymbol{x}\longrightarrow\xi_i$ は線型である．したがってこれは線型形式であり，これを $\boldsymbol{a}'_i$ で表わし，選ばれた基底に関しての添数 i の**座標形式**と呼ぶ．

$(\boldsymbol{a}'_i)_{i\in I}$ は E^* の基底を形成する．それを E の基底の**双対基底**という．実際，任意の $\boldsymbol{x}'\in E^*$ に対して，式

$$(1)\qquad \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x})=\sum \boldsymbol{x}'(\xi_i\boldsymbol{a}_i)=\sum \xi_i\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{a}_i)=\sum \boldsymbol{a}'_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{a}_i)$$

$$\text{さらに}\quad \boldsymbol{x}'=\sum \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}'_i$$

が成立する.

これは a'_i が E^* を生成することを示しており，他方，それらは確かに独立である．なぜならば，関係 $\sum \lambda_i a'_i = 0$ はすべての族 $(\xi_i)_{i \in I}$ に対して $\sum \lambda_i \xi_i = 0$ に同値であるから，したがってすべての i に対して $\lambda_i = 0$ であるからである.

$x'(a_i) = \xi'_i$ とおく，すなわち $x' = \sum \xi'_i a'_i$ とおくと，公式 (1) は

（２）　$$\langle x, x' \rangle = \sum \xi_i \xi'_i$$

と書ける.

これは E と E^* において二つの双対な基底をとったときの $\langle x, x' \rangle$ の標準形式である．これはユークリッド空間上の線型関数の良く知られた形式にほかならない．例： $f = ax + by + cz$.

したがってつぎのようにいうことができる.

E が n 次元であり，E^* も n 次元であるとき，E と E^* において双対な二つの基底を選べば，$\langle x, x' \rangle = \sum \xi_i \xi'_i$ が成立する.

4. 線型方程式

われわれが構成してきた非常に一般的な形式論によって，数多くの代数学と解析学の問題を簡単な形に帰着することができる.

定義.　E と F を同じ体 K 上の二つの線型空間とする．$f(x) = y_0$ の形のすべての方程式を**線型方程式**と呼ぶ．ここで f は E から F への線型写像であり，y_0 は F の既知の元である.

$f(x) = y_0$ を満たす E のすべての元 x はこの方程式の解と呼ばれる.

方程式 $f(x) = 0$ は与えられた方程式の同伴斉次方程式，そして y_0 は与えられた方程式の右辺といわれる.

右辺が 0 であるすべての線型方程式は斉次線型方程式と呼ばれる.

例.　1)　E は開円板の平面 $u^2 + v^2 < 1$ で定義された，すべての次数の偏導関数をもつ実数値関数の空間とする．空間 F は E と同じものとする．写像 f は微分演算子，たとえば写像 $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ とする．方程式 $f(x) = y_0$ は，この場合右辺をもった偏微分方

程式にほかならない.

2)　E は閉円板 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上で連続で，この円板の内部で調和である実数値関数の空間とする．空間 F はこの円板の周上で連続な関数の空間とする.

そして写像 f はすべての $\varphi\in E$ に対して，φ のこの円板の周への制限を対応させるものとする.

$y_0\in F$ に対して，$f(\varphi)=y_0$ であるような関数 φ を求めることは，関数 y_0 に対するディリクレの問題になる.

3)　空間 E は $[0,1]$ 上で連続な実数値関数 $x(t)$ の空間であるとし，$F=E$ とする．$\Phi(u,v)$ を正方形領域 $0\leqslant {u \atop v} \leqslant 1$ 上で連続な実数値関数であるとし，f を式

$$f(x)(t)=\int_0^1 \Phi(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

で定義された E から E への写像であるとする.

$b\in F$ に対する方程式 $f(x)=b$ は，つぎの積分方程式にほかならない.

$$\int_0^1 \Phi(t,\tau)x(\tau)d\tau=b(t).$$

線型方程式の解の形

定理.　$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ を線型方程式とする．$\boldsymbol{x}_0$ がこの方程式の一つの解であるとすると，すべての解は $\boldsymbol{x}_0$ に同伴斉次方程式のすべての解を加えることによって得られる．したがって解の集合は E の部分線型空間 $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ に平行移動 $\boldsymbol{x}_0$ を行なって得られたアフィン多様体[1] $\boldsymbol{x}_0+f^{-1}(\boldsymbol{0})$ である.

この方程式が高々一つの解をもつためには，$f^{-1}(\boldsymbol{0})=\{\boldsymbol{0}\}$ であること，したがって f が E から $f(E)$ の上への同型写像であることが必要十分である.

この定理の証明は容易である.

連立方程式.　線型方程式はしばしば線型連立方程式の形で表わされる.

E を線型空間，$(F_i)_{i\in I}$ を線型空間の有限個または無限個の族，すべての $i\in I$ に対して f_i を E から F_i への線型写像とする.

方程式 $(f_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}_i)_{i\in I}$，$\boldsymbol{b}_i\in F_i$ のすべての族は**連立方程式**と呼ばれる．この連立方程式の解はこのすべての方程式に共通な解である.

---

[1] たとえば，ブルバキ“代数 2”§9 参照．［訳注］

このような連立方程式はただ一つの線型方程式に同値である. 実際, F を F_i の積, $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_i)$, そして f を E から F への写像でその成分が f_i であるものとする. 方程式 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$ は与えられた連立方程式に同値である.

逆に, 一つの方程式を連立方程式におきかえると便利なこともある. たとえば, F を q 次元, $(\boldsymbol{b}_j)_{j\in J}$ を F の基底であると仮定する. すべての $\boldsymbol{y}\in F$ に対して, $\boldsymbol{y}=\sum\beta_j\boldsymbol{b}_j$ が成立する.

空間 E から F への線型写像を与えることは, つぎのような n 個の線型形式 f_i を与えることと同値である.

$$\text{すべての } \boldsymbol{x}\in E \text{ に対して,}\qquad f(\boldsymbol{x})=\sum f_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_j.$$

したがって, すべての方程式 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ は q 個の連立方程式 $f_j(\boldsymbol{x})=\beta_j$ に同値である. これはまた $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'_j\rangle=\beta_j$ とも書かれる.

このような連立方程式は**スカラー連立方程式**と呼ばれる.

これからはさらに E は有限次元であると仮定しよう.

有限次元の空間上のスカラー連立方程式

定理. E を n 次元線型空間, $(\boldsymbol{x}'_i)_{i\in I}$ を E^* の r 個の元の自由族とする (すなわち E 上の r 個の線型形式).

任意のスカラー η_i に対して, スカラー連立方程式

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'_i\rangle=\eta_i\qquad(i\in I)$$

は一つの解をもつ.

解の集合は $\boldsymbol{x}_0+V$ という形である. ここで V は $(n-r)$ 次元の E の部分線型空間である.

実際, $\boldsymbol{x}'_i$ は E の基底 B に双対な E^* の基底 B^* に属す.

B^* に関しては, 各 $\boldsymbol{x}'_i$ は一つだけを除いて他のすべての座標は零であり, したがって, 双対な基底 B と B^* に関して計算された $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'_i\rangle$ は ξ_i になる. よってこの連立方程式は

$$\xi_i=\eta_i\qquad(i\in I)$$

と書かれる.

これは解として, $i\in I$ に対しては $\xi_i=\eta_i$ を, $i\notin I$ に対しては任意の ξ_i をもつ. したがってこの定理の空間 V は座標 $(\xi_i)_{i\in I}$ が零であるような E の部分空間であり, そ

の次元は $(n-r)$ である.

任意のスカラー連立方程式を研究するために，新しい定義を導入する.

族 $(\boldsymbol{x}'_i)_{i\in I}$ によって生成された E^* の部分空間の次元をスカラー連立方程式 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_i\rangle = \eta_i$ $(i \in I)$ の階数と呼ぶ（すなわち，これは線型独立な $\boldsymbol{x}'_i$ の最大数でもある).

前の定理を用いて，つぎのことが証明される.

定理. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_i\rangle = \eta_i$ $(i \in I)$ を n 次元線型空間 E 上の階数 r のスカラー連立方程式とする. この連立方程式が少なくとも一つの解をもつためには，すべての零になる線型結合 $\sum \lambda_i \boldsymbol{a}'_i = 0$ に対して，$\sum \lambda_i \eta_i = 0$ が成立することが必要十分である.

この連立方程式が一つの解 $\boldsymbol{x}_0$ をもつとき，解の集合は $\boldsymbol{x}_0 + V$ の形である. ここで V は $(n-r)$ 次元の E の部分空間である[1].

系. 1) n 次元空間 E 上の斉次スカラー連立方程式が零でない解をもつためには，その階数 r が $<n$ であることが必要十分である.

2) n 次元空間上の n 個の方程式からなるスカラー連立方程式が一つの解をもち，しかもただ一つである（クラメルの連立方程式）ためには，同伴斉次連立方程式が零の解しかもたないことが必要十分である.

スカラー連立方程式をさらに進んで研究するためには，そして特にそれらの階数を決定するための便利な規準を与えるためには，行列式の理論を用いなければならないが，ここではふれない.

---

[1] ブルバキ“代数 2” §7, n° 6 参照.［訳注］

線型写像と行列

フランス大学教授

A. リィチネロヴィチ

この課程のいままでの講義では，代数構造，すなわち，群，環，体，線型空間の要点を学んだ．わたくしの講義ではある線型空間から他の線型空間への線型写像と行列によるその表現を述べ，これらの各種の概念のいろいろな例を示そう．

わたくしの講義の題材はすこし前には一次変換の理論と呼ばれていたものにまったく相応しており，正直にいって，現代的な観点からはここでは本質的に新しい結果はもたらされない．わたくしがこれから述べることがらは，あなたがたはすべて知っておられる．現代的な見方の価値ある点は一般化であり，一般化およびそれによってもたらされる数学的結果で理論を書きあらためる効能は能力の倹約にある．

一次変換の古典的理論では，文字と説明のついた添字のおびただしい洪水で，そのために基本的な結果と証明の指針となっている考えを識別するのがやっとであった．行列式とそれを使って成り立っている一次方程式の理論が本質的な役割をなしていたと思われる．

われわれの新しい方法では，できるだけ少なく書き，本質的にはベクトルまたは写像について直接的に推論し，そしてその理論を構成している重大な代数構造を明らかに見分けることを好み，そしてもはや行列式は好まない．行列式をあまり使用すると，基本的な要点の単純さがかくされてしまうように思われる．わたくしの講義では，行列式は実際には使わないが，固有値についての部分だけがただ一つの例外である．そこでも行列式を使わないことも有効であり可能であるが，それはあまり興味をひかなかった．わたくしは一次方程式の古典的理論の結果を全然知らないとは仮定せずに，現代数学の証明の仕方の柔軟性とエレガントさに光をあてるように説明された各種の証明を選ぶことを試みた．

わたくしがあなたがたに説明するためにもちだす理論は，あなたがたを喜ばすどころか

疑いもなく機嫌をそこねるだろう．というのは，あなたがたは，わたくしもそうですが，最初から別のものに条件づけられてきているからです．あまりに《抽象的》であるといってわたくしを非難しないでください．この親切な非難が意味するものを正当に評価することは困難であり，具体性の度合というものは黒板の上に散ったチョークの粉の量に比例はしないものです．具体性というものはほとんど確かにわれわれが条件づけられていることがら，すなわちわれわれの個人的形成の歴史における要素である．わたくしの世代の多くの数学者にとっては，現代代数学はわれわれがちょうどそれを同化したときに抽象化が始まった．より若いわれわれの同僚 ── 思いきっていえば ── 少年時代から線型空間を栄養にしてきた者にとっては，それはすばらしく具体的に思われるのです．

復　　習

可換体 K（スカラーの体）に関連して，つぎに述べる二つの算法を与えることによって集合 E 上に**線型空間**の構造が定義されるという．

1° 加法で表わされた E の内算法は，E 上で可換群の構造を定義するものである．

2° 《スカラーによる積》と呼ばれる算法は，$\alpha \in K$，$\boldsymbol{x} \in E$ に対して $\alpha\boldsymbol{x} \in E$ を対応させるもので，つぎの性質を満たす．

任意の $\alpha, \beta \in K$，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ に対して

$$1\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \qquad \alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$$

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x} \qquad \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}.$$

ここで研究する線型空間は有限次元であると仮定する．次元とは E のベクトルの自由系（または線型独立なベクトルの系）の最大の個数である．

E の**部分線型空間** V は E の部分集合で，すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $\alpha \in K$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ と $\alpha\boldsymbol{x}$ が V に属するようなものである．E の一つの系のベクトルの線型結合は E の部分空間，すなわち《その系によって生成された》部分空間に属す．ベクトルの系の**階数**とはその系からとりだすことのできるベクトルの自由系の最大個数で，これはそのベクトルの系によって生成される部分空間の次元と一致する．

E の部分空間 V が与えられているとき，E のすべてのベクトルがただ一通りの仕方で，U の一つのベクトルと V の一つのベクトルの和で表わされるような部分空間 U が存在する．特に，$U \cap V = \boldsymbol{0}$ であるとき，U は E における V の**補部分空間**と呼ばれる．

I.　線型写像についての一般的なことがら

1.　線型写像の概念

a)　E と F を同じスカラーの体 K（たとえば実数体または複素数体）上で定義された，次元がそれぞれ n と p の二つの線型空間とする．

定義.　E から F への写像 f はつぎの条件を満たすとき線型であるという．

1)　すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ に対して　$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

2)　すべての $\boldsymbol{x} \in E$, $\alpha \in K$ に対して　$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$

E から F の上への線型写像 f は E から F の上への**準同型写像**といわれ，さらに f が一対一写像ならば，f は E から F の上への**同型写像**といわれる．

E 上の線型形式は E から，K 自身に関連して K によって定義された 1 次元線型空間への線型写像の例になっている．もしもこの形式が恒等的に零でないならば，E から K の上への準同型写像でもある．初等幾何学では多数の線型写像が活躍する．初等幾何学の空間において三面角 $oxyz$（座標軸に相当）が与えられているとき，E をすべての（自由）ベクトルのなす線型空間，F を平面 xoy のすべてのベクトルの線型空間とし，写像 f として oz に平行な射影をとると，これは E から F の上への線型写像である．

同様に，E を上と同じものとし，F を E とする．中心が O で，倍率 λ の倍写像は E から自分自身の上への一対一線型写像を定義する．

b)　f による E のベクトルの像である F のベクトルは F の部分空間 $f(E)$ を構成し，それは部分線型空間である．実際，$(\boldsymbol{l}_i)$ が E の任意の一つの基底であるとき，ベクトル

（1）　$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{l}_i \qquad (x^i \in K)$$

に対して，f は線型であるから，F のベクトル

（2）　$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(\boldsymbol{l}_i)$$

が対応する．よって $f(E)$ のすべての元は $f(\boldsymbol{l}_i)$ の線型結合によって表わされる．逆に，係数が (x^i) であるこのような線型結合によって表わされる F のすべてのベクトルは (1)

の f による像であり，$f(E)$ は $f(\boldsymbol{l}_i)$ によって生成された F の部分空間である．

$f(E)$ の次元を**線型写像 f の階数**と呼ぶ．この階数 r は F の n 個のベクトル $f(\boldsymbol{l}_i)$ の系の階数にほかならない．よって $r \leqslant n, p$.

c)　E から $f(E)$ 上への写像 f が一対一のときは，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ である．(2) で定義された $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{0}$ のときは，(1) で定義された $\boldsymbol{x}$ は零であり $x^i=0$ である．この結果，$f(\boldsymbol{l}_i)$ は自由系をなし $r=n$ である．すなわち，

$$\dim f(E) = \dim E.$$

逆に，同じ次元の二つの空間 E と F を考えよう．一方から他方への同型写像を構成することは容易である．すなわち，$(\boldsymbol{l}_i)$ を E の基底，$(\boldsymbol{f}_i)$ を F の基底とするとき，$\boldsymbol{x}=\sum x^i\boldsymbol{l}_i \in E$ を $f(\boldsymbol{x})=\sum x^i\boldsymbol{f}_i \in F$ に対応させればよい．このように定義したものが E から F 上への一対一線型写像，すなわち同型写像であることは容易に証明される．したがって，二つの線型空間が同型であるための必要十分条件は，それらが同じ次元をもつことである．

2. 部分線型空間の像

a)　線型写像 f は線型空間の構造を保存するという基本的な性質をもっている．正確にいえば，V を E の部分線型空間とするとき，f による V のベクトルの像である F のベクトルは F の部分空間 $f(V)$ を構成し，それは線型空間である．これは f を V に制限し，上で $f(E)$ について得たばかりの結果を適用すれば十分である．f が一対一のときは，$\dim V = \dim f(V)$ である，すなわちベクトルの系の階数は同型写像によって保存される．

W が $f(E)$ の部分空間であるとき，$f^{-1}(W)$ は f による像が W に属するような E のベクトルの集合である．$f^{-1}(W)$ が E の部分空間であることは明らかである．実際，

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in f^{-1}(W) \text{ ならば，} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \in W, \quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in f^{-1}(W)$$

であり，

$$\alpha \in K \text{ ならば，} f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) \in W, \ \alpha\boldsymbol{x} \in f^{-1}(W)$$

である．

特に，$W=0$ のときも $f^{-1}(0)$ は E の部分空間である．

b)　この部分空間に関して，つぎの定理が成立する．

定理．　線型空間 $f(E)$ は $f^{-1}(0)$ の補空間である E の任意の部分空間に同型である．

L を E における $f^{-1}(0)$ の補部分空間とする．すべての元 $\boldsymbol{z} \in L$ に対して $f(E)$ の元 $f(\boldsymbol{z})$ を対応させよう．すべての $f(E)$ はこのようにして得られることが容易にわかる．実際，$f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in E)$ を $f(E)$ の任意の元とするとき，分解

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \qquad (\boldsymbol{y} \in f^{-1}(0),\ \boldsymbol{z} \in L)$$

を考えよう．

このとき，$f(\boldsymbol{y}) = 0$ であるから

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z})$$

が成り立つ．このようにして定義された L から $f(E)$ の上への写像は，$f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ であるとき，$\boldsymbol{z} \in L \cap f^{-1}(0)$ は零であるから一対一写像である．このようにして L から $f(E)$ の上への一対一写像が定義できた．したがって二つの空間は同型である．これよりつぎの結果が得られる．

$$\dim f^{-1}(0) = n - r.$$

特に，f が E から $f(E)$ の上への同型写像であるための必要十分条件は $r = n$ である．f が E を F の上へ写像するためには，$r = p$ であることが必要十分である．f が E から F の上への同型写像であるためには，$r = n = p$ であることが必要十分である．

3. E から F への写像の線型空間

E から F への線型写像の集合 $L(E, F)$ に対して，E 上の線型形式の集合に導入した算法（前の講義を参照）を拡張できる．$L(E, F)$ 上につぎの二つの算法を導入しよう．

1° $f, g \in L(E, F)$ が与えられているとき，それらに対してつぎのように定義された $f + g$ と表わされる写像を対応できる．

$$\text{任意の } \boldsymbol{x} \in E \text{ に対して} \quad f + g : \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}).$$

この写像が線型であることは明らかである．

2° $\alpha \in K$ と $f \in L(E, F)$ が与えられているとき，それらに対してつぎのように定義された αf と表わされる，明らかに線型な写像を対応できる．

$$\text{任意の } \boldsymbol{x} \in E \text{ に対して} \quad \alpha f : \boldsymbol{x} \to f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}).$$

この二つの算法の集合が $L(E, F)$ 上に線型空間の構造を定義することは容易に証明される．このようにして線型写像を加えたり，スカラーを掛けることを知った．零写像はす

べての $\boldsymbol{x}\in E$ に対していつでも $\mathbf{0}\in F$ を対応させる写像であり，f の反写像はすべての $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ の反ベクトルを対応させるものである．

4. 二つまたは多くの線型写像の積

次元がそれぞれ n, p, q である三つの線型空間 E, F, G を考えよう．f を E から F への，g を F から G への線型写像とする．つぎの方法で定義された E から G への写像を考える．すなわち，$\boldsymbol{x}\in E$ に対して，f によって F の元 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ をきめ，つぎに g によって G の元 $\boldsymbol{z}=g(\boldsymbol{y})=g[f(\boldsymbol{x})]$ を対応させる．この写像を $g\circ f$ と表わす．これは明らかに線型である．なぜならば，$\alpha\in K$，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in E$ に対して，

$$g[f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)]=g[f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2)]=g[f(\boldsymbol{x}_1)]+g[f(\boldsymbol{x}_2)]$$
$$g[f(\alpha\boldsymbol{x})]=g[\alpha f(\boldsymbol{x})]=\alpha g[f(\boldsymbol{x})].$$

線型写像 $g\circ f$ は線型写像 f と g の**結合**，または**積**と呼ばれる．この積は二つ以上の線型写像に対してもただちに拡張でき，その定義から結合律を満たす．それは [$L(E,F)$ および $L(F,G)$ の中の] 線型写像の加法に関して分配的である．

II．長方行列による表現

5. 行列による線型写像の表現

a)　次元がそれぞれ n と p の線型空間 E と F をとり，E において一つの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ を選ぶ．この基底を固定しておくと，任意の線型写像 $f\in L(E,F)$ に対して，F の n 個のベクトルの系 $f(\boldsymbol{l}_i)$ が対応し，逆に，F の n 個のベクトルの任意の系 $(\boldsymbol{f}_i)$ に対して，ベクトル

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x^i\boldsymbol{l}_i\in E$$

を，ベクトル

$$\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}x^i\boldsymbol{f}_i\in F$$

へ写像する E から F への写像 f を対応できる．

この写像は線型で $f(\boldsymbol{l}_i)=\boldsymbol{f}_i$ となるものである．

したがって，E において一つの基底を選ぶと，E から F への線型写像の集合 $L(E,F)$ から F の n 個のベクトルの系の集合の上への一対一対応を定義できた．

b)　このような系のベクトルを定義するためには，それらの成分を F の一つの基底で表わすのが最も便利である．

F の一つの基底 $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ が与えられているとき，$f(\boldsymbol{l}_i)$ をこの基底で表わそう．

$$
(3)\qquad
\begin{cases}
f(\boldsymbol{l}_1) = a_1^1\vec{\varepsilon}_1 + a_1^2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_1^p\vec{\varepsilon}_p \\
f(\boldsymbol{l}_2) = a_2^1\vec{\varepsilon}_1 + a_2^2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_2^p\vec{\varepsilon}_p \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(\boldsymbol{l}_n) = a_n^1\vec{\varepsilon}_1 + a_n^2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n^p\vec{\varepsilon}_p
\end{cases}
$$

これによってつぎの長方形の表

$$
A = \begin{pmatrix}
a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^p \\
a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^p \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^p
\end{pmatrix} = (a_i^\mu) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n\,;\ \mu = 1, 2, \cdots, p)
$$

の中に並べられた K の np 個の元が導入された．

文字 A（または他の大文字）で表わされたこのような表を n **行** p **列の行列**（または $n \times p$ **行列**）と呼ぶ．

よって，E と F においてそれぞれ一つ基底が選ばれていると，すべての線型写像 f に対して，(3) によって表わされる $n \times p$ 行列が対応する．それは選んだ基底についての f の**表現**といわれる．逆に，K の元からなる一つの $n \times p$ 行列を与えると，一つの同じ行の中にある元は，F の基底についての，一つのベクトル $\boldsymbol{f}_i$ の成分である．このようにして得られた F の n 個のベクトルは a) によって一つの線型写像 f を定義する．したがって，

定理．　E の基底と F の基底が一つずつ選ばれているとき，公式 (3) によって $L(E,F)$ から $n \times p$ 行列の集合の上への一対一写像が定義される．

c)　K の p 個の元の順序づけられた列を元とする線型空間 K^p を考えよう．そこには標準基底 [$(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, \cdots, 0)$ … 等の基底] が存在する．一つの $n \times p$ 行列が与えられているとし，それを A とすると，A の各行は行ベクトルと呼ばれる K^p の一つの

ベクトルを定義する．n 個の行ベクトルの系の階数を行列 A の階数と呼ぶ．

第1節により，F の一つの基底を与えることによって K^p と F とのあいだの同型写像が定義され，それによって対応するベクトルは同じ成分をもっている．E と F の基底を任意に選んでも，A の階数は行ベクトルによって定義された F の n 個のベクトルの系の階数に等しいから，その結果 A の階数は行列 A を表現とする写像 f の階数に等しい．したがって，線型写像 f の表現であるすべての行列 A はこの写像と同じ階数をもつ．

しばしばベクトルをそれらの成分を仲介にして計算したり，点をそれらの座標を仲介にして計算したりするのと同様に，線型写像を表現の行列を仲介にして計算するのが便利であることがわかる．よってまさしく線型写像の《解析幾何学》に到達した．

6. 表現行列の例

a)　射影の行列．

通常の幾何学の空間上に，どの二つも直交する三つのベクトル $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ を与えよう．E を通常の幾何学のベクトルからなる線型空間，F を $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ によって生成された部分空間，f を E から F の上への線型写像である E から F の上への正射影とする．E は基底 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ によって張られており，F は基底 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ によって張られているから，つぎの関係が成立する．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} \\ f(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j} \\ f(\boldsymbol{k}) = 0 \end{cases} \quad \text{これより表現行列は} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

この階数は2で，これは $f(E) = F$ の次元に等しい．

b)　倍写像行列．

E を上と同じもので，F を E と等しくし，そして f としては倍率 $\boldsymbol{\lambda}$ の倍写像で定義された E からそれ自身の上への線型写像とする．E と F は基底 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ に対してつぎのように関係づけられる．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{i}) = \lambda\boldsymbol{i} \\ f(\boldsymbol{j}) = \lambda\boldsymbol{j} \\ f(\boldsymbol{k}) = \lambda\boldsymbol{k} \end{cases} \quad \text{これより表現行列は} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

この階数は3である．

7. 長方行列の代数．加法とスカラーによる乗法

K の元よりなる $n \times p$ 行列の集合を $M(n, p)$ と表わす．$M(n, p)$ 上に K に関連した線型空間の構造を定義しよう．

a)　$M(n, p)$ の二つの元の加法．A と B を K の元からなる二つの $n \times p$ 行列とする．E と F を K 上の（または関連した）線型空間で，次元がそれぞれ n と p で，基底をもつものとすれば，A と B は E から F への線型写像 f と g の表現である．

基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ と $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ についての写像 $f+g$ の表現行列 S を調べよう．$A=(a^\mu_i), B=(b^\mu_i)$ とすれば，

$$f(\boldsymbol{l}_i) = \sum_\mu a^\mu_i \vec{\varepsilon}_\mu, \qquad g(\boldsymbol{l}_i) = \sum_\mu b^\mu_i \vec{\varepsilon}_\mu$$

が成立し，この結果 $(f+g)(\boldsymbol{l}_i) = f(\boldsymbol{l}_i) + g(\boldsymbol{l}_i) = \sum_\mu (a^\mu_i + b^\mu_i)\vec{\varepsilon}_\mu$ であり，S の元は

$$S^\mu_i = a^\mu_i + b^\mu_i \tag{4}$$

である．

元が (4) で与えられる $n \times p$ 行列 S を行列 A と B の和といい，

$$S = A + B$$

で表わす．

このようにして定義された算法によって $M(n, p)$ に可換群の構造が与えられる．行列 $\mathbf{0}$ はそのすべての元が零であるものであり，ある行列に対する反行列とは，もとの行列の反元を元とする行列である．

b)　スカラーによる積．記号は前と同じものとし，$\alpha \in K$ とする．写像 αf の表現行列 P について調べよう．それはつぎのようになる．すなわち

$$f(\boldsymbol{l}_i) = \sum_\mu a^\mu_i \vec{\varepsilon}_\mu, \qquad \alpha f(\boldsymbol{l}_i) = \sum_\mu \alpha a^\mu_i \vec{\varepsilon}_\mu$$

であるから，P の元は

$$p^\mu_i = \alpha a^\mu_i \tag{5}$$

である．

このようにして定義された二つの算法が $M(n, p)$ に線型空間の構造を与えることが容易に証明できる．

c)　E と F においてそれぞれ一つずつ基底が選ばれているとき，$L(E, F)$ から $M(n, p)$

の上への一対一写像 Φ で，すべての線型写像 $f \in L(E, F)$ に対してその表現行列，$A = \Phi(f)$ を対応させるものを考えよう．加法とスカラーによる積の定義より，

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g), \qquad \Phi(\alpha f) = \alpha\Phi(f).$$

この結果，Φ は線型空間 $L(E, F)$ から線型空間 $M(n, p)$ の上への同型写像である．

$M(n, p)$ の基底を構成することは容易である．E_μ^i を元 e_i^μ だけが1で他はすべて零である $n \times p$ 行列とする．$A = (a_i^\mu)$ であるとき，明らかに

$$A = \sum_{i,\mu} a_i^\mu E_\mu^i$$

である．このように，すべての $n \times p$ 行列は E_μ^i の線型結合として表わされる．さらに，行列0に対しては，すべての係数は必ず零である．E_μ^i は np 個の元からなる $M(n, p)$ の一つの基底をなす．したがって，同型な線型空間 $M(n, p)$ と $L(E, F)$ は np 次元である．

8. 長方行列の積

線型写像の結合または積から，ある場合には長方行列の積を定義できる．E，F，G を次元がそれぞれ n，p，q である K 上の三つの線型空間とし，その中でそれぞれの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$，$(\vec{\varepsilon}_\mu)$，$(\vec{\eta}_\Lambda)$ を選ぼう．

A が $n \times p$ 行列，B が $p \times q$ 行列であるときは，A は選ばれた基底に関しての E から F への写像 f の表現であり，B は F から G への写像 g の表現である．E から G への写像 $g \circ f$ の表現行列 D を調べよう．それは $n \times q$ 行列である．

$$f(\boldsymbol{l}_i) = \sum_\mu a_i^\mu \vec{\varepsilon}_\mu, \qquad g(\vec{\varepsilon}_\mu) = \sum_\Lambda b_\mu^\Lambda \vec{\eta}_\Lambda$$

であるときは，式

$$g[f(\boldsymbol{l}_i)] = \sum_\mu a_i^\mu g(\vec{\varepsilon}_\mu) = \sum_{\mu,\Lambda} a_i^\mu b_\mu^\Lambda \vec{\eta}_\Lambda$$

が成立する．すなわち

$$g[f(\boldsymbol{l}_i)] = \sum_\Lambda \left(\sum_\mu b_\mu^\Lambda a_i^\mu\right)\vec{\eta}_\Lambda.$$

したがって，行列 D の元は

$$d_i^\Lambda = \sum_\mu b_\mu^\Lambda a_i^\mu \tag{6}$$

である．

行列 D は B の A による積といい，BA と書く．A の列の数と B の行の数が等しいときだけ積 BA を作ることができる，そしてこの積は A の行を B の列に掛けて得られる[1]．つぎの注意は明らかである．

a）行列の積は結合的である．すなわち，A が $n\times p$，B が $p\times q$，C が $q\times r$ 行列であるとき，関係

$$(CB)A=C(BA)$$

が成立する．

これはそれぞれの行列が表わす線型写像の積に対しては，この結合律が満たされていることからただちに得られる．

b）行列の積は加法に関して，右および左分配的である．すなわち，A, A_1, A_2 が $n\times p$ 行列，B, B_1, B_2 が $p\times q$ 行列であるとき

$$B(A_1+A_2)=BA_1+BA_2,\qquad (B_1+B_2)A=B_1A+B_2A$$

が成り立つ．これも対応する線型写像に対して同じ関係が満たされているからである．

c）A が $n\times p$ で B が $p\times q$ のとき，BA を作ることができるが，$n=q$ のときだけ AB を作ることができる．この場合，BA は $n\times n$ で AB は $p\times p$ である．さらに $n=p$ であっても，AB と BA は一般には異なることが容易に示される．すなわち積は可換ではない．

9. 積　の　例

a）単位ベクトルが $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ である二つの直交軸 xoy で張られた平面を考えよう．E，F，G をその平面の自由ベクトルからなる空間と同じものとし，f としては角 α の回転，g としては ox に関する対称変換をとる．するとつぎのようになる．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha \\ f(\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{i}\sin\alpha+\boldsymbol{j}\cos\alpha \end{cases}\qquad (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\text{ についての表現行列は } A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

同様に，

$$\begin{cases} g(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i} \\ g(\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{j} \end{cases}\qquad \text{表現行列は } B=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

つぎの関係が成立する．

---

[1] 通常の積と異なることに注意．［訳注］

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

幾何学的には，BA は角 α の回転にひきつづいての ox に関しての対称変換を表わす，すなわち角 $-\dfrac{\alpha}{2}$ の直線に関しての対称変換である．AB は角 $\dfrac{\alpha}{2}$ の直線に関しての対称変換を表わす．

b）第6節 a）の射影をふたたびもってくる，しかしここでは E から E の中への写像として考えよう．したがって $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ についての表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．幾何学的には，$f \circ f = f$ である．この結果 $A \cdot A = A$ となる，これはただちに証明できる．

10. ある基底に関してのベクトルの表現行列

E を体 K 上の線型空間とし，K を元 $\mathbf{1}$ によって定義された標準基底の1次元線型空間と考えよう．K から E への任意の線型写像 ξ に対して，E のベクトル $\boldsymbol{x} = \xi(\mathbf{1})$ を対応させよう．逆に，E の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して，K から E への線型写像 ξ

$$\xi : \alpha \longrightarrow \alpha \boldsymbol{x} \qquad (\alpha \in K)$$

を対応させよう．

このようにして E と $L(K, E)$ の間の同型写像を定義できる．

E において一つの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ を選ぼう．すると式

$$\xi(\mathbf{1}) = \boldsymbol{x} = x^1 \boldsymbol{l}_1 + x^2 \boldsymbol{l}_2 + \cdots + x^n \boldsymbol{l}_n$$

が成立し，この選ばれた基底に関する ξ の表現行列は $1 \times n$ 行列

$$X = (x^1 \ x^2 \ \cdots \ x^n)$$

である．

この行列は基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ についてのベクトル $\boldsymbol{x}$ の表現であるといわれる．

F を K 上の別な線型空間，f を E から F への線型写像とする．写像 $f \circ \xi$ はベクトル

$f(\boldsymbol{x})$ を対応させる K から F への線型写像である．A が $(\boldsymbol{l}_i)$ に関しての f の表現行列で，(ξ_μ) が F の基底であるならば，$\mathbf{1}$ と (ξ_μ) に関しての $f\circ\xi$ の表現行列は AX である．この $1\times p$ 行列は基底 (ξ_μ) に関しての F のベクトル $f(\boldsymbol{x})$ の表現である．したがって，われわれは線型空間のベクトルを，1行で，列は考えている空間の次元の数と同じ数である行列 X で表現できることがわかった．線型写像による像ベクトルは同じ型の行列 AX で表現される．これは線型写像を表現している行列に原像のベクトルを表現している行列を掛けた積である．

11. 一つの基底に関しての線型形式の表現行列

y^* を線型空間 F 上の線型形式とする．定義より，y^* は F から K への線型写像である．(ξ_μ) が F の一つの基底で，$\mathbf{1}$ が K の標準基底であるとき，y^* の表現行列はつぎの式から得られる．

$$\begin{cases} y^*(\xi_1) = y_1^*\cdot\mathbf{1} \\ y^*(\xi_2) = y_2^*\cdot\mathbf{1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^*(\xi_p) = y_p^*\cdot\mathbf{1} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_p^* \end{pmatrix}$$

ここで Y^* は1列の行列である．

f を E から F への線型写像とする．写像 $y^*\circ f$ は E から K への線型写像，すなわち E 上の線型形式，または E に双対な E^* の元である．A が E の基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ と F の基底 (ξ_μ) に関しての f の表現行列ならば，$(\boldsymbol{l}_i)$ と $\mathbf{1}$ に関しての $y^*\circ f$ の表現行列は Y^*A である．

したがって f から

$$f^* : y^* \in F^* \longrightarrow y^*\circ f \in E^*$$

によって定義される F^* から E^* への線型写像 f^* が得られた．

これは f の双対写像である．これを与えられた基底に双対な F^* と E^* の基底で表わせば，転置行列（行と列を入れかえたもの）にかえて，第10節の論法がそのまま使える．

III. 線型作用素と正方行列

12. 線型作用素環と正方行列環

a) n 次元線型空間 E が与えられているとき，E からそれ自身への線型写像を E の**線型作用素**（または E の**自己準同型写像**）という．

したがって F が E と同じであると仮定するだけで前の定理はすべて線型作用素に適用できる．線型作用素 f を表現するには，ここでは E の一つの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ を与え，そしてこの基底だけでベクトル $f(\boldsymbol{l}_i)$ を表わすことで十分である．すなわち

$$f(\boldsymbol{l}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \boldsymbol{l}_j.$$

したがって，作用素 f は基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ に関して［一般の場合の基底 (ε_μ) が $(\boldsymbol{l}_i)$ と同じである］つぎの $n \times n$ 行列（正方行列）によって表現される．

$$A = (a_i^j).$$

b) $L(E, E)$ を E の線型作用素の集合とすると，$L(E, E)$ にはもちろん線型空間の構造が入っている．しかしここではさらにつぎの関係が成り立つ．E の二つの線型作用素の積 $g \circ f$ はいつでも定義され，それはまた E の線型作用素である．この $L(E, E)$ におけるこの算法は結合的であり，加法に関して右および左分配的であるが，それは可換的でない．最後に，注目すべき線型作用素である恒等作用素 e が存在し，それは E のすべてのベクトルにそのベクトル自身を対応させるものである．任意の $f \in L(E, E)$ に対して，

$$f \circ e = e \circ f = f$$

である．

ゆえに，この算法は単位元をもつ．$\alpha \in K$ であるとき，

$$f \circ (\alpha e) = (\alpha e) \circ f = \alpha f$$

が成り立ち，よってスカラー α による乗法は線型作用素の積の特別の場合と考えることができる（αe による右または左からの積）．

このようにして $L(E, E)$ 上に二つの算法が用意された．

加法で表わされた算法は $L(E, E)$ にアーベル群の構造を与え，$\circ$ で表わされた算法は非可換な環の公理を満たし，単位元が存在する．

定理．　線型作用素の加法と乗法は $L(E, E)$ 上に単位元をもつ非可換な環の構造を定義する．

c)　$M(n, n)$ を $n \times n$ 正方行列の集合とする．二つのこのような行列 A, B の積はいつでも定義でき，それは $BA = \left(\sum_j b^k_j a^j_i\right)$ である．E における一つの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ が選ばれているとする．このとき $L(E, E)$ から $M(n, n)$ の上への一対一写像 Φ を考えると，それはすべての線型作用素 f に対してその表現行列 $A = \Phi(f)$ を対応させるものである．行列の和と積の定義から，

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g), \qquad \Phi(g \circ f) = \Phi(g) \cdot \Phi(f)$$

が成り立ち，$L(E, E)$ 上で成立したことがらは自動的に $M(n, n)$ についても成立する．特に，積は恒等作用素の表現である行列 I を単位元としてもつ．すなわち，

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta^j_i).$$

したがってつぎのように述べることができる．

定理．　$n \times n$ 行列の加法と乗法によって $M(n, n)$ 上に単位元をもつ非可換環の構造が定義され，それは $L(E, E)$ の環構造に同型である．

この環は零因子をもつ．すなわちこれはつぎの例で示すように，その因数が零でないのに二つの行列の積が零になるという意味である．

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最後に，K の元を係数とし，作用素環または正方行列環の一つの元を変数（および値）とする多項式の概念を容易に定義できる．

$$A^0 = I \qquad A^1 = A \qquad A^2 = A \cdot A \qquad A^p = A^{p-1} \cdot A$$

とおくと，明らかに

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q} = A^q \cdot A^p$$

が成り立つ．

単項式はここでは A の累乗の $\alpha \in K$ による積である．多項式は単項式の有限個の和で

ある．K の中に係数と変数をもつすべての多項式

$$P(\zeta)=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\zeta^k$$

に対して，行列を変数とする多項式

$$P(A)=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k A^k \qquad (A\in M(n,n))$$

を対応できる．

K が複素数体であるとき，$P(\zeta)$ はつぎの形で表わせる．

$$P(\zeta)=\alpha_p\prod_{k=1}^{p}(\zeta-\mu_k)$$

同一視することによって容易に

$$P(A)=\alpha_p\prod_{k=1}^{p}(A-\mu_k I)$$

が証明される．

13. 正則線型作用素と正則行列

a) E の線型作用素 f が**正則**であるというのは，それが E から E の上への一つの線型写像を定義するときである．f が正則であるための必要十分条件は，$f(E)$ が E と一致すること，すなわち f の階数が n であることである．この場合，f は一対一で E から E の上への同型写像を定義する（第2節），すなわちそれは E の**自己同型写像**と呼ばれるものである．正則でない作用素は**特異**であるという．

二つの正則な線型作用素 f と g の積 $g\circ f$ は，それが E から E の上への写像であるから，それ自身も明らかに正則な線型作用素である．逆に，f と g が $g\circ f$ が正則であるような二つの線型作用素であるとき，f と g はともに正則である．実際，

$$\operatorname{rank}(g\circ f)=\dim g[f(E)]\leqslant \dim f(E)=\operatorname{rank} f$$

であり，$\operatorname{rank}(g\circ f)=n$ であるから，$\operatorname{rank} f=n$ が成立する．したがって f は正則でありかつ $f(E)=E$ である．$g(E)$ の次元は n であるから，g はまた正則である．

f が正則ならば，一対一であり，すべての $\boldsymbol{y}\in E$ に対して $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ であるようなただ一つのベクトル $\boldsymbol{x}$ が対応する．このとき E から E の上への一対一写像 $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}$ は f の逆写像 f^{-1} であり，すべての $\boldsymbol{x}\in E$ に対して，

(7)
$$f^{-1}[f(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{x}$$

が成り立つ．これが写像 f^{-1} を特徴づけるものである．これが線型であることは第2節a)とまったく同じ推論でわかる．したがって，すべての正則な線型作用素fは逆写像 f^{-1} をもつ．それはまた正則な線型作用素，すなわち逆作用素である．明らかに f^{-1} の逆はfである．(7)の関係とそこでfと f^{-1} を入れかえて得られる関係は

(8)
$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = e$$

と表わされる．

二つの線型作用素fとgが $g\circ f = e$ を満たすものであれば，それらは正則であり，すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ に対して，

$$g[f(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{x}$$

が成立する．これはgが正則線型作用素fの逆作用素であることを示している．したがってつぎのように表わされる．

定理.　$\circ$で表わされた積は $\boldsymbol{E}$ の正則線型作用素の集合に群構造を与える．すなわちそれは $\boldsymbol{E}$ の自己同型写像群である．

f, gが二つの正則線型作用素であるとき，$g\circ f$ も正則であるから逆が存在し，$f^{-1}\circ g^{-1}$である．すべての群に対して成立するこの性質はただちに証明できる．なぜならば，

$$f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f = f^{-1}\circ f = e.$$

b)　正則線型作用素のすべての表現行列は正則であるといわれる．$n\times n$ 行列が正則であるためには，その階数がnであることが必要十分である．$\boldsymbol{E}$ の基底が選ばれているとき，すべての正則線型作用素に対してその表現行列を対応させる写像Φによって，正則線型作用素についてのこれまでの結果を $n\times n$ 正則行列についての結果に翻訳できる．

特に，すべての $n\times n$ 正則行列Aに対して，つぎのようなただ一つの $n\times n$ 行列 A^{-1} を対応できる．任意の $1\times n$ 行列 X に対して

$$A^{-1}AX = X$$

が成り立つ．すなわち

$$A^{-1}A = I$$

を満たすものである．

正則であるこの行列は A の逆行列と呼ばれ，それはまたつぎの関係を満たす．

$$AA^{-1} = I.$$

したがってつぎのように述べることができる.

定理.　$n\times n$ 行列の積は K の元を元とする $n\times n$ 正則行列の集合に，n 次元の K 上の線型空間の自己同型写像群に同型な群構造を与える．この群は K の n 個の変数に対する（一般）線型群と呼ばれ，$\mathrm{GL}(n,K)$ で表わす.

A と B が二つの正則な $n\times n$ 行列であるとき，正則な BA は逆行列 $A^{-1}B^{-1}$ をもつ．また A が正則ならば，等式 $AB=0$ と $BA=0$ のそれぞれから $B=0$ が得られることを注意しよう．なぜなら，A^{-1} を A の逆とすれば，$AB=0$ より $A^{-1}AB=0$ が得られ，これより $B=0$ である．他の等式についても同様である.

14. 行列式の導入

a）すべての $n\times n$ 正方行列に対して，その行列式（K の中に値をもつ）$D(A)$ を対応できる．この行列式が零であるためには，行ベクトルが線型従属である．すなわちその行列の階数が n より小さいことが必要十分である．この結果，行列が正則であるためには，その行列式が $\neq 0$ であることが必要十分である.

A と B が二つの $n\times n$ 行列であるとき，行列式の乗法の通常の規則は

$$D(BA)=D(B)D(A)$$

で表わされる.

b）クラメルの連立方程式の常用の定理によって，正則行列 A の逆行列 A^{-1} の元の値がただちに得られる．つぎの行列方程式を考えよう.

$$AX=Y$$

ここで Y（$1\times n$ 行列）は与えられたものであり，未知の X（$1\times n$ 行列）はつぎの n 個の連立方程式によって表わされる.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = y^j \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

これがクラメルの連立方程式である．α_j^i を $D(A)$ の展開の元 a_j^i の係数（余因子）とすれば，

$$x^i=\frac{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^i y^j}{D(A)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j^i}{D(A)}y^j=\sum_{j=1}^{n}b_j^i y^j$$

であることを知っている．ここで

$$b_j^i = \frac{\alpha_j^i}{D(A)} \tag{9}$$

とおいた．

$B=(b_j^i)$ とおけば，行列の関係式

$$X = BY$$

が得られ，そして B は A の逆行列である．

15. 行列の階数をきめるための正方行列の利用

$n \times p$ 行列 A が与えられているとき，A から $(n-q)$ 個の行と $(p-q)$ 個の列を除いて得られた $q \times q$ 行列を A から導かれた q 次 $(q \leqslant n, p)$ の正方行列と呼ぶ．行列 A の階数はつぎの定理で決定することができる．

定理．　行列 A の階数は A から導かれる正則正方行列の最大次数に等しい．

A の階数が r であると仮定する．A から次数 $s > r$ の正則正方行列を導くことは不可能であるが，しかし次数 r のものを少なくとも一つ導くことができることを示すことが必要である．

A の階数が r ならば，A の s 個 $(s > r)$ の任意の行ベクトルにおいて少なくとも一つの線型関係式が存在する．B を A から導かれた次数 s の正方行列とする．その各行は A の一部の s 行である．この結果，それらの間には少なくとも一つの線型関係式が存在するから，B の階数は s ではあり得ない，よってそれは正則ではない．

第二点の証明はいささか長くなる．標準基底 $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ をもった線型空間 K^p を考える．

A の階数が r ならば，r 個の行ベクトルの自由系が存在し，そして簡単にするためにそれらを A のはじめの r 個の行に対応するものと仮定できる．$(\vec{\lambda}_a)$ $(a=1,2,\cdots,r)$ をこれらのベクトルとし，V_1 をそれらによって張られる K^p の部分空間とする．

$r < p$ であるときは V_1 に属さない $\vec{\varepsilon}_\mu$ が少なくとも一つ存在する，よってそれは $\vec{\lambda}_a$ に線型独立である．$\vec{\lambda}_a$ にこれをつけ加え，そしてこのようにして得られた新しいベクトルの系からまた同じことをはじめる．このようにして $\vec{\lambda}_a$ につけ加えると K^p の基底を定義するような $(p-r)$ 個のベクトルを $(\vec{\varepsilon}_\mu)$ の中からいつでも選べることがわかる．それらをうしろのベクトル $(\vec{\varepsilon}_{r+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_p)$ であると仮定する．すなわち $(\vec{\varepsilon}_\Lambda)$ $(\Lambda = r+1, \cdots, p)$

とする.

V_2 で r 個のベクトル $(\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_r)$, すなわち $(\vec{\varepsilon}_a)$ で生成された K^p の部分空間を表わし, V_3 で $(\vec{\varepsilon}_\Lambda)$ で生成された部分空間を表わそう. V_1 と V_2 はともに V_3 の二つの補空間であることは明らかである. $\boldsymbol{x} = \sum_{\mu=1}^{p} x^\mu \vec{\varepsilon}_\mu \in V_1$ とする. K^p は V_2 と V_3 の直和であるから,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \qquad (\boldsymbol{y} \in V_2,\ \boldsymbol{z} \in V_3)$$

であり,

$$\boldsymbol{y} = \sum_{a=1}^{r} x^a \vec{\varepsilon}_a, \qquad \boldsymbol{z} = \sum_{\Lambda=r+1}^{p} x^\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda$$

が成立する.

$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y}$ によって定義された V_1 から V_2 への写像 f は明らかに線型である. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は V_1 と V_3 に同時に属するベクトル $\boldsymbol{x}$, よって零ベクトルに対してだけ得られるから f は一対一である. この結果, f の階数は V_1 の次元 r に等しく, f は V_1 から V_2 の上への同型写像である.

この同型写像でベクトル

$$\vec{\lambda}_a = \sum_{\mu=1}^{p} a_a^\mu \vec{\varepsilon}_\mu \qquad (a = 1, \cdots, r)$$

に対して, ベクトル

$$f(\vec{\lambda}_a) = \sum_{b=1}^{r} a_a^b \vec{\varepsilon}_b \qquad (a = 1, \cdots, r)$$

が対応する. そこで V_1 の基底 $(\vec{\lambda}_a)$ と V_2 の基底 $(\vec{\varepsilon}_b)$ での同型写像 f の表現行列 $B = (a_a^b)$ の階数は r, したがって正則である. これが A から導かれた次数 r の正則行列である.

16. 反変性と相似な行列

a) g を E の正則線型作用素, $(\boldsymbol{l}_i)$ を E の一つの基底, P をこの基底での g の正則な表現行列とする. 自由系をなす n 個のベクトル $\vec{\varepsilon}_i = g(\boldsymbol{l}_i)$ は E の別の一つの基底を定義する. 逆に, E の一つの基底 $(\vec{\varepsilon}_i)$ が与えられていると, 線型写像 g が存在しそれは基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ を基底 $(\vec{\varepsilon}_i)$ の上へ写像するただ一つのものである (第1節). これは明らかに正則で

あって，$\boldsymbol{x}' = \sum x'^i \boldsymbol{l}_i$ に対して $g(\boldsymbol{x}') = \sum x'^i \varepsilon_i$ を対応させるものである.

E の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}')$ は，基底 (ε_i) について $1 \times n$ 行列

$$X' = (x'^i)$$

によって定義される.

はじめの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ について，これは行列

$$X = PX'$$

によって定義される.

ゆえに，二つの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ と (ε_i) が与えられており，第二のものが第一の基底について正則行列 P で表現されるような線型作用素で得られるとき，第一の基底について行列 X で定義されるベクトル $\boldsymbol{x}$ は第二の基底については，行列

(9)
$$X' = P^{-1}X$$

で定義される.

これがベクトルの成分は反変的な形で変換されるといっていることである.

b) 空間Eは二つの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ と (ε_i) をもっているとし，Aを $n \times n$ 行列とする．それは $(\boldsymbol{l}_i)$ に関してのある線型作用素fを表わす．X が $(\boldsymbol{l}_i)$ についてのEのベクトル $\boldsymbol{x}$ を表わしているとき，ベクトル $f(\boldsymbol{x})$ は式

$$Y = AX$$

で表わされる.

(ε_i) に関して，$\boldsymbol{x}$ と $f(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ

$$X' = P^{-1}X \qquad Y' = P^{-1}Y$$

で表わされる.

この結果，

$$Y' = P^{-1}APX'$$

であり，基底 (ε_i) についての f の表現行列は

$$B = P^{-1}AP \qquad [P \in \mathrm{GL}(n, K)]$$

である.

行列 B は線型群において A に**相似**であるといわれ，A と B は異なる二つの基底に関して同じ線型作用素を表わす．特に，添数 i の置換 π が与えられているとき，行列 $A = (a_i^j)$と $B = (a_{\pi(i)}^{\pi(j)})$ とは基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ と $(\boldsymbol{l}_{\pi(i)})$ に関して同じ線型作用素を表わすから相

似である．この場合 B は置換によって A から導かれるという．

相似は $M(n,n)$ の元の間の同値関係であることが容易にわかる．特に，推移律を満たすことはただちに得られる．

$$C = Q^{-1}BQ \ [Q \in \mathrm{GL}(n,K)] \text{ で } B = P^{-1}AP \text{ ならば,}$$

$$C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}APQ$$

ここで PQ は正則である．

IV．スペクトルの概念と線型群における正方行列の標準化

17. 標準化の問題

相似性は $M(n,n)$ における同値関係であるから，与えられた一つの行列に相似な行列の集合を考えよう．どの二つも相似である元からなる集合は線型群の中での**同値類**と呼ばれ，したがって $M(n,n)$ は同値類に分けられる．

一つの類はその中の一つの行列を知ることでわかるから，その類の中でできるだけ単純な行列をさがしだすのは当然である．その行列は各類に対して置換の違いを除いてただ一通りの方法でその類を特徴づけるようなものである．その類のすべての行列に相似なこの行列は，その類の任意の行列 A の**標準形**と呼ばれる．

標準化はつぎの重要な性質をもっている A の元の関数を仲介にしている，すなわちそれらの関数は A に相似なすべての行列に対して同じ値をとるものである．このような関数は線型群に関する行列 A の不変式といわれる．線型群における $n \times n$ 行列の標準化の問題は代数学の非常にむずかしい問題であり，ここでは特別な場合だけについて扱う．

18. 対 角 行 列

正方行列の最も単純な例の一つは対角行列の場合である．すなわち $n \times n$ 行列 A が対角行列であるというのは，主対角線上の元以外がすべて零であるものである．たとえば I は対角行列である．α_i を対角行列の対角線上の i 番目にある元とする．$(\boldsymbol{l}_i)$ が E の基底であるとき，A はつぎのような線型作用素 f を表わす．

$$f(\boldsymbol{l}_i) = \alpha_i \boldsymbol{l}_i.$$

この結果，一つの $\boldsymbol{l}_i$ で生成された E の各1次元部分空間は f によって不変である．$A=(\alpha_i)$ と書く．

対角行列は $M(n,n)$ の可換部分環を定義する．実際，$A=(\alpha_i)$ と $B=(\beta_i)$ が二つの対角行列であるとき，それらは $(\boldsymbol{l}_i)$ に関しての作用素 f と g で

$$f(\boldsymbol{l}_i)=\alpha_i\boldsymbol{l}_i \qquad g(\boldsymbol{l}_i)=\beta_i\boldsymbol{l}_i$$

であるものを表わす．

この結果，

$$f(\boldsymbol{l}_i)+g(\boldsymbol{l}_i)=(\alpha_i+\beta_i)\boldsymbol{l}_i \qquad g[f(\boldsymbol{l}_i)]=\beta_i\alpha_i\boldsymbol{l}_i$$

であり，そして $A+B=(\alpha_i+\beta_i)$，$BA=(\beta_i\alpha_i)$ は対角行列で，積 BA は明らかに可換である．

標準形として対角行列をとることができるかどうかを調べるのは当然である．これは一般に不可能である，しかしこれが成立する重要な場合を明らかにしよう．

19. 固有ベクトルと固有値

以後 K を複素数体 C であると仮定する．

a) E を C 上の線型空間とする．E の線型作用素 f が与えられているとき，f によって不変な一次元部分線型空間を求めよう．$\boldsymbol{p}\neq 0$ がこのような部分空間に属すならば，

(10) $$f(\boldsymbol{p})=\chi\boldsymbol{p} \qquad \chi\in C$$

であるようなスカラー χ が存在する．これは

(11) $$(\chi e-f)(\boldsymbol{p})=0$$

と書くことができる．

このようなベクトル $\boldsymbol{p}$ が存在するならば，$(\chi e-f)$ は正則ではありえない．逆に，$(\chi e-f)$ が特異であるならば，$(\chi e-f)^{-1}(0)$ は零ではなく，(11) または (10) を満たす $\boldsymbol{p}\neq 0$ が存在する．よってつぎの定義に導かれる．

定義． $(\chi e-f)$ が特異であるようなすべての値 $\chi\in C$ を線型作用素 f の**固有値**と呼ぶ．$f(\boldsymbol{p})=\chi\boldsymbol{p}$ であるようなすべてのベクトル $\boldsymbol{p}\neq 0$ は固有値 χ に対応する**固有ベクトル**と呼ばれる．f の固有値の集合は f の**スペクトル**と呼ばれる．

b) E において一つの基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ をとり，A を f の表現行列とする．$(\chi e-f)$ は表現

行列 $(\chi I - A)$ をもつ．χ が f の固有値であるためには，$D(\chi I - A) = 0$，すなわち χ が式

$$\psi(\chi) = D(\chi I - A) = \begin{vmatrix} \chi - a_1^1 & -a_1^2 & \cdots & -a_1^n \\ -a_2^1 & \chi - a_2^2 & \cdots & -a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_n^1 & -a_n^2 & \cdots & \chi - a_n^n \end{vmatrix} \tag{12}$$

の零点であることが必要十分である．

n 次の多項式 $\psi(\chi)$ は相似な二つの行列に対して，その定義自身から，同じであることに注意することは重要である．実際，$B = P^{-1}AP$ ならば，

$$\chi I - B = P^{-1}(\chi I - A)P$$

であり，そして

$$D(\chi I - B) = D(\chi I - A)$$

である．

多項式 $\psi(\chi)$ を作用素 f または行列 A の**特性多項式**と呼ぶ．この零点 $\chi_1, \cdots, \chi_n$ は，異なるものであっても等しいものであっても f の固有値であり，これはまた A の固有値と呼ばれる．$\psi(\chi)$ の異なる係数は線型群における A の不変量である．特に，$\psi(\chi)$のはじめの二項は明らかにつぎのように書かれる．

$$\psi(\chi) = \chi^n - \left(\sum_i a_i^i\right)\chi^{n-1} + \cdots$$

この結果，関数

$$\mathrm{tr.}\,A = \sum a_i^i = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n$$

は A の不変量であり，この行列の**跡**（トレース）またはその行列が基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ について表わす作用素 f の跡という．

20. 異なる固有値をもつ行列の標準化

A を C の中の元からなる $n \times n$ 行列ですべて異なる固有値 $\chi_1, \cdots, \chi_n$ をもつものとする．基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ をもった C 上の線型空間 E において，上で調べたように A は固有値 (χ_i) の作用素 f を表わす．各固有値 χ_i に対して，少なくとも一つの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{0}$ で

$$f(\boldsymbol{p}_i) = \chi_i \boldsymbol{p}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{13}$$

であるものが対応する．

このようにして得られた n 個の固有ベクトル p_i は，χ_i が異なるときは一つの自由系をなす．実際，$q\ (q<n)$ 個の線型独立のベクトル p_i しか存在しないと仮定しよう．たとえばそれをはじめの q 個のものとするとき，p_n はただ一通りに $p_\mu\ (\mu=1,\cdots,q)$ の線型結合として表わされる．すなわち，

$$p_n=\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_\mu p_\mu \qquad (\alpha_\mu \text{ のすべては零ではない}). \tag{14}$$

したがって，

$$f(p_n)=\sum_{\mu}\alpha_\mu f(p_\mu)$$

が成立する．すなわち，

$$\chi_n p_n=\sum_{\mu}\alpha_\mu\chi_\mu p_\mu.$$

$\chi_n=0$ ならば，すべての χ_μ は零ではないから，すべては零ではない係数をもった p_μ の線型結合で 0 に等しいものが存在することになる．したがって $\chi_n\neq 0$ であり，

$$p_n=\sum_{\mu}\alpha_\mu\frac{\chi_\mu}{\chi_n}p_\mu. \tag{15}$$

これは (14) と一致しなければならない．$\alpha_\mu\neq 0$ ならば，$\chi_\mu=\chi_n$ であり固有値が等しくなる．

自由系 (p_i) は E の一つの基底を定義する．この基底に対する作用素 f をとると，(13) により f は対角行列

$$R(A)=\begin{pmatrix}\chi_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \chi_2 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & \chi_n\end{pmatrix}$$

によって表わされる．したがってこれは A と相似である．

ゆえに，異なる固有値をもつすべての行列 A は，A の固有値を元とする対角行列に相似である．

固有値に同じものがある場合には，標準形はより複雑な形になる（ジョルダンの標準形）．

行列 B が行列 A に相似であるためには，それらが同じ固有値をもつことが必要である．固有値が異なるときにはこの条件はまた十分である．なぜならばこのとき二つの行列は

$R(A)$ に相似であるからである.

21. ハミルトン=ケイリーの定理

正方行列 A の特性多項式 $\phi(\chi)$ の重要な性質の初等的な証明を示そう.

$\alpha_j^i(\chi)$ を $D(\chi I-A)$ の展開における i 行 j 列の元の 係数 とする. これは χ についての $(n-1)$ 次多項式である. $C(\chi)=(\alpha_j^i(\chi))$ とおくと,

$$(\chi I-A)^{-1}=\frac{C(\chi)}{\phi(\chi)}$$

が成立する (第14節). そしてこの結果

$$C(\chi)(\chi I-A)=\phi(\chi)I \tag{16}$$

である. ここで $C(\chi)$ は行列の係数をもった χ についての多項式

$$C(\chi)=\Gamma_1\chi^{n-1}+\Gamma_2\chi^{n-2}+\cdots+\Gamma_n \qquad [\Gamma_i\in M(n,n)]$$

である.

$\phi(\chi)$ を展開して,

$$\phi(\chi)=\chi^n+c_1\chi^{n-1}+\cdots+c_n$$

とすると, (16) から係数を比較して, 関係

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \qquad &= \quad I\\ \Gamma_2-\Gamma_1A &= \quad c_1I\\ \cdots\cdots&\cdots\\ \Gamma_n-\Gamma_{n-1}A &= c_{n-1}I\\ -\Gamma_nA &= \quad c_nI\end{aligned}$$

が得られる.

この式の両辺につぎつぎに A^n, A^{n-1}, …, A^0 を掛け, そして辺々加えると,

$$\phi(A)=0$$

が得られる.

ハミルトン=ケイリーの定理.　$\phi(\chi)$ が正方行列 A の特性多項式ならば,

$$\phi(A)=0$$

が成立する.

二次形式とエルミート形式

ソルボンヌ大学教授

P. ル ロ ン

1. 序　　論

n 個の実変数 x_1, x_2, …, x_n の二次形式は実係数をもったこれらの変数についての二次の同次多項式である．すなわち，

$$F=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j. \tag{1}$$

(1) の表示において，和は添数 i, j に関してそれぞれ独立に 1 から n までとらせる．積 $x_ix_j=x_jx_i$ であるから，$a_{ij}=a_{ji}$ と仮定しよう，すなわち $n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ は対称であるとする．よって

$$F=\sum_i a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j \tag{2}$$

と書かれる．

二次形式の学習は数学専修科[1] の課程で間接的にでてくる．それは二次曲面の方程式で同次座標 $x_1=X, x_2=Y, x_3=Z, x_4=T$ では，実際に $F=0$ と表わされる．すなわち

$$F=AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+\cdots+2CTX+\cdots+DT^2=0$$

である．形式 (1) を直交群において標準化することは《s についての方程式》[2] に関係づ

---

[1] mathématiques spéciales. 中等教育第二段階（日本での高校）卒業後のグランド・エコール（高等専門学校，ポリテクニック等伝統あるものが多い）の受験は非常にむずかしく，二・三年の準備後に合格するものが多い． 主として理工系のグランド・エコール準備クラスとしておもに都市のリセ（国立の中等教育機関）にもうけられているもので，mathématiques élémentaires クラス，mathématiques supérieures クラスのさらに上位におかれるもの．［訳注］

[2] 固有値を求めるための特性方程式 $D_A(s)=0$.［訳注］

けられる．ある種の学校の課程に二次形式を明確に導入するには説明の観点を修正するのが適用性にとんでいる．よりはっきりと本質的な概念（線型変換，直交群，極形式の対称性 $\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$，ここで $A\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ を対称行列で変換したものである，等々）のたすけを求めることになろう．これらの概念についてはあとの節で説明し，最も基本的な証明を与えよう．それらは任意個数の変数に対して成立する利点がある．これにはこれまでもっぱら二次形式の学習に向けられていた教育を修正するもう一つの理由がある．それは学生の大多数が学ぶ物理学と力学へそれを応用させることである．二次形式（例：剛体の慣性楕円体）を表現し具体化するのに都合よく仲立ちしている二次曲面へすべてを応用できる余地を残して，線型変換

(3)
$$y_i=\sum_j a_{ij}x_j \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

すなわち，$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ $[A=(a_{ij})$ は対称行列$]$ の研究と，ベクトルの概念およびこの変換 (3) の固有値についての研究に力をいれよう，後者は科学のあらゆる分野で数多く応用される（例：回転と剛体の運動モーメントの間の対応，梁の曲げの偶力と中立線との対応，等々）．

ここでは形式 (1) とエルミート形式と呼ばれる

(4)
$$\Phi=\sum_{p,q}c_{pq}\bar{x}_p x_q$$

を同時に扱う，ここで係数 c_{pq} は複素数である．a と $\bar{a}$ で二つの共役な複素数を表わす．形式 Φ は変数 x_p, $\bar{x}_p$ の二組について双線型である．すべての共役な値 x_p, $\bar{x}_p$ に対して，その値が実数であるとき Φ を**エルミート形式**という．そうであるための必要十分条件は

(5)
$$c_{pq}=\bar{c}_{qp}$$

である．これは容易に証明される（添数が p と q 以外の変数を除いてみよ）．エルミート形式はとりわけ力学で本質的な役割をもっている．

エルミート形式の研究，すなわちそれのユニタリー群においての標準化はその双線型の特徴を利用してなされる．二次形式の標準化はその特別な場合でしかない．実際，(4) で c_{pq} が実数ならば，(5) は $c_{pq}=c_{qp}$ となるからである．したがって二次形式 (1) は変数を実数値について研究するときの実係数のエルミート形式である．ここでは二次形式の場合にはいくつかの単純化をすることを指示しながらエルミート形式の研究をしよう．こ

の単純化とは本質的には実数をその共役なものと同じものと見ることである．特別な各場合には注意をうながすが，このような表現の修正によって，ここでは実数の座標をもった空間 E_n における二次形式に独立に説明をしよう．

2. 空間 C_n とノルム空間 E_n

C_n で複素数体 C 上の n 次元線型空間を表わす．C_n の基底 R_0 をなす C_n の n 個の元(またはベクトル) $\boldsymbol{e}_i$ の集合が存在する．すなわち，C_n の任意の元 $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = \sum x_i \boldsymbol{e}_i$$

で表わすものである．x_i は基底 R_0 についての $\boldsymbol{x}$ の座標と呼ばれる n 個の複素数である．C_n の自己準同型写像 g は C_n からそれ自身への変換 $\boldsymbol{x}' = g(\boldsymbol{x})$ で，それは線型空間の構造[1] を保存する．これは

$$(6) \qquad \boldsymbol{e}_i' = g(\boldsymbol{e}_i) = \sum_j a_{ji} \boldsymbol{e}_j$$

を知ることによって決定される．したがって $\boldsymbol{x}' = \sum x_i g(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i,j} x_i a_{ji} \boldsymbol{e}_j$ が成立する．基底 R_0 について，変換 $\boldsymbol{x}' = g(\boldsymbol{x})$ は式

$$(7) \qquad x_i' = \sum_j a_{ij} x_j$$

で表わされる．このとき自己準同型写像 $\boldsymbol{x}' = g(\boldsymbol{x})$，すなわち (6) は基底 R_0 について行列 $A = (a_{ij})$ で表現されるという．実際，これによって $\boldsymbol{x}'$ の座標を基底 R_0 について $\boldsymbol{x}$ の座標の関数として公式 (7) で表わすことができる．これはさらに縮めた形

$$(8) \qquad \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

で表わすことができる．ここでは (7) のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を $(n \times 1)$ 行列とみなしている．

二つの自己準同型写像 $\boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ をひきつづいて行なうと，自己準同型写像 $\boldsymbol{x}'' = BA\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}$ が得られる．ここで $C = BA$ は行列の積で，

$$c_{ij} = \sum_s b_{is} a_{sj}$$

である．

---

[1] G. ショケの "線型空間" の講義を参照せよ．

A が行列 (a_{ij}) であるとき，元

$$a'_{ji} = a_{ij}$$

からなる行列 A' を A の**転置行列**と呼ぶ.

$(A')' = A$ および $(BA)' = A'B'$ が成り立つ.

C_n におけるスカラー積とノルム.　二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の**エルミート・スカラー積**とは，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で表わされた複素数であり，つぎの性質を満たすベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の関数として定義される.

a）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}$　（非可換律）

b）$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}_1 + \mu\boldsymbol{b}_2) = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1) + \mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_2)$

$(\lambda\boldsymbol{a}_1 + \mu\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{b} = \bar{\lambda}(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}) + \bar{\mu}(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b})$

λ と μ は任意の複素数であり，$\bar{\lambda}$ と $\bar{\mu}$ はそれらの共役である.

c）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ が零ベクトルのときだけ零で，それ以外は零でない正数である．正または零である数

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**と呼ぶ.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を一つの基底 $R_0(\boldsymbol{e}_i)$ で考えるとき，式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \Big(\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i\Big)\cdot\Big(\sum_j b_j\boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{i,j} \bar{a}_i b_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)$$

が成立する．したがってエルミート・スカラー積は積 $(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)$ の値を固定すれば完全に定義される.

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ であるとき**直交**するといわれる．ノルム $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ であるベクトル $\boldsymbol{a}$ は**単位ベクトル**といわれる．どの二つも直交するような単位ベクトルからなる集合は**正規直交系**であるといわれる．基底 R_0 が正規直交系であるといわれるのは，それが正規直交ベクトルからなるときである.

定理 1.　$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_m$ が線型独立なベクトルであるとき，つぎのような正規直交ベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, …, $\boldsymbol{b}_m$ の集合が存在する．すなわちすべての整数 k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ に対して，ベクトル $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ と $(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k)$ が同じ線型空間の基底をなすようなものである.

$m = 1$ のとき，これは明らかである．なぜなら仮定より $\|\boldsymbol{a}_1\| \neq 0$ であり，$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$

をとれば十分である.

よって $m-1$ に対して成立すると仮定して，$\boldsymbol{m}$ についての帰納法で証明する．このとき $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ と $(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k)$ を $k \leqslant m-1$ に対して，特に $k=m-1$ に対して，同じ線型空間を張るように $m-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{m-1}$ を配列しておく.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_m - \sum_i \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}_m)$$

とおくと，$\boldsymbol{c}$ は明らかに $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{m-1})$ によって決定される線型空間に属さない．なぜなら，もしもそうでなければ $\boldsymbol{a}_m$ もその空間に属することになり仮定に反するからである.

$$\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{c}(\|\boldsymbol{c}\|^{-1})$$

と定義する．すると

$$\|\boldsymbol{b}_m\| = 1 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{b}_k = \|\boldsymbol{c}\|^{-1}[\boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_k - \overline{(\boldsymbol{b}_k \cdot \boldsymbol{a}_m)}] = 0$$

が成立する.

したがって，$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ と同じ線型空間を張り，それらは正規直交である.

注意.　1)　エルミート積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は可換でないが，a) を満足する.

2)　どの二つも直交し零でない p 個のベクトル $\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_p$ は線型独立である．実際，$\sum_1^p \lambda_i \boldsymbol{c}_i = 0$ より，関係

$$\boldsymbol{c}_i \cdot \left(\sum \lambda_j \boldsymbol{c}_j\right) = \lambda_i \|\boldsymbol{c}_i\|^2 = 0 \quad \text{であるから} \quad \lambda_i = 0$$

が成立する.

前の証明はつぎつぎにベクトル $\boldsymbol{b}_i$ を構成する方法を示している．まず第一に，$\boldsymbol{a}_i$ の系を正規化することからはじめる，すなわちつぎのベクトル $\boldsymbol{c}_i$ を作ることである.

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \lambda_2^1 \boldsymbol{c}_1$$

$$\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \lambda_3^1 \boldsymbol{c}_1 + \lambda_3^2 \boldsymbol{c}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{a}_n + \lambda_n^1 \boldsymbol{c}_1 + \cdots + \lambda_n^{n-1} \boldsymbol{c}_{n-1}$$

λ_p^q がなんであっても，これらのベクトル $\boldsymbol{c}_i$ のそれぞれは零になることはない．つぎつぎに $\boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{c}_1 = 0, \cdots, \boldsymbol{c}_m \cdot \boldsymbol{c}_q = 0$ を作ることによって，$\lambda_2^1, \cdots, \lambda_m^q$ を決めることができる．すなわち，$\lambda_2^1 \|\boldsymbol{c}_1\|^2 + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{c}_1 = 0$ より λ_2^1 が定まり，ついで

$$\lambda_3^1 \|\boldsymbol{c}_1\|^2 + \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{c}_1 = 0 \quad \text{と} \quad \lambda_3^2 \|\boldsymbol{c}_2\|^2 + \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{c}_2 = 0$$

より λ_3^1 と λ_3^2 が定まる，等々．つぎに $\boldsymbol{c}_i$ の系を $\boldsymbol{b}_i = \dfrac{\boldsymbol{c}_i}{\|\boldsymbol{c}_i\|}$ とおいて正規化する．よって $\boldsymbol{b}_i$ が求める正規直交系である．

E_n における実数のスカラー積．　実数体上の n 次元線型空間を E_n とする．一つの元 $\boldsymbol{a}$，すなわち E_n のベクトルは，n 個の独立なベクトルの系または E_n における基底 R_0 についてのその実数座標 (a_i) によって決定される．この場合前に述べたことでただ一つ修正しなければならないのは，スカラー積の定義である．それはここでも $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で表わすが，つぎの条件を満たす $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の実関数として定義する．

a）　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

b）　$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}_1 + \mu\boldsymbol{b}_2) = \lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1 + \mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_2$

ここで λ，μ は任意の実数である．

c）　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ は正であり，$\boldsymbol{a}$ が零ベクトルであるときだけ零である．

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ のときはまた $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するといい，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = 1$ のとき $\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルであるという．正規直交系は前と同様に定義する．この場合スカラー積は実数で可換であるから，$\boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{b}_k$ と $\boldsymbol{b}_k\cdot\boldsymbol{b}_m$ を区別しないで書くことができること以外はまったく同様な証明で定理1が得られる．

エルミート・スカラー積（C_n においての）と実スカラー積（E_n においての）の性質

a）　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ をベクトル $\boldsymbol{e}_i$ からなる正規直交基底 R_0 について表わしておくと，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i,j} \bar{a}_i b_j (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) = \sum_i \bar{a}_i b_i, \qquad \|\boldsymbol{a}\|^2 = \sum_i |a_i|^2$$

であり，

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| = \left|\sum_i \bar{a}_i b_i\right| \leqslant \sum_i |a_i|\,|b_i|$$

および

$$\left(\sum_i |\bar{a}_i|\,|b_i|\right)^2 \leqslant \sum_i |a_i|^2 \cdot \sum_i |b_i|^2$$

が成立する．最後の不等式は λ についての三項式

$$M(\lambda) = \sum_i (|a_i| + \lambda|b_i|)^2 \geqslant 0$$

で，この判別式は負または零であることから得られたものである．したがって

$$(9) \qquad |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|$$

が成立する．

b） これによりつぎの式が得られる．

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|=(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$$

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\| \tag{10}$$

これは三角不等式と呼ばれる．証明は C_n において定義されたエルミート・スカラー積に対しても，E_n におけるスカラー積に対しても適用される．この場合三角形の一辺は他の二辺の和より小さいかまたは等しいというユークリッド幾何学の定理を思いだして (10) を理解すればよい．

随伴作用素． T をこの節のはじめですでに扱った型の作用素，すなわち行列 (t_{ij}) で表現される自己準同型写像とする．T に対して T の随伴作用素といわれる作用素 T^* を対応させる．T^* を

$$T^*\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot T\boldsymbol{b} \tag{11}$$

によって定義する．

T^* が C_n の自己準同型写像であることは容易にわかる．T^* に伴う行列が (t^*_{ij}) であるとすると，正規直交基底 R_0 に関して (11) を書き表わせば

$$\sum_{i,j}\bar{t}^*_{ij}\bar{a}_jb_i=\sum_{i,j}\bar{a}_jt_{ji}b_i$$

が成立する．したがって R_0 に関して T^* は行列

$$t^*_{ij}=\bar{t}_{ji} \tag{12}$$

によって決定される．

(12) によって定義された行列 (t^*_{ij}) は行列 (t_{ij}) の**随伴行列**と呼ばれ，$T=(t_{ij})$ の転置行列 T' の共役をとることによって得られる．この二つの操作，転置と共役はともに可換である．T の随伴である T^* の定義は，まず第一に (12) よって随伴行列を定義し，つぎに等式 (11) を確かめることによって初等的に表わすことができる．しかしながら，(11) による T^* の直接的な定義のほうが一般的であり，エルミート・スカラー積の定義されている空間の任意の作用素の随伴に拡張できる．

(11) または (12) から随伴行列のつぎの性質が得られる．

a） $(A^*)^*=A$

b） $(BA)^*=A^*B^*$

c） A が $(n\times n)$ 正則行列のとき，すなわち逆行列をもつ（またはその行列式が

零でない）ならば，$AA^{-1}=1$ が成立するから，b）を使って $(A^{-1})^*A^*=1$ が得られる．したがって $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$ である．

エルミート作用素.　ところでそれ自身が随伴作用素である作用素を区別しよう．関係

$$\boldsymbol{y}\cdot T\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$$

が成り立つとき，作用素 T は**エルミート型**（空間 C_n において）であるといわれる．すなわち $T=T^*$ ということである．量子力学での作用素は一般にこの型である．行列 $A=(a_{ij})$ で決定される自己準同型写像 $T\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ がこの性質をもつ，すなわち

(13)
$$\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$$

または（12）により $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$ が成立する，ための条件を求めよう．$A=(a_{ij})$ がエルミート的であるためには，形式

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}=\sum_i \bar{x}_i\sum_j a_{ij}x_j=\sum_{i,j}a_{ij}\bar{x}_i x_j$$

が序論でくわしく説明した意味でエルミート形式であることが必要十分である．

E_n における対称作用素.　実数の座標をもち，実で可換なスカラー積の定義された空間 E_n において，

(11)′
$$T'\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot T\boldsymbol{b}$$

が成り立つとき，作用素 T' は作用素 T の**転置**であるという．

T が E_n の自己準同型写像であるとき，T' も自己準同型写像である．このとき T' に伴う行列 (t'_{ij}) は

(12)′
$$t'_{ij}=t_{ji}$$

で与えられる．これは $(t_{ij})=A$ の転置行列である．さらに $A'=A^*$ が成立する．すなわち元が実数であるから，行列の随伴はその転置と一致する．作用素 T はその転置と一致するとき**対称**であるという．正規直交基底 R_0 において $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，$A=(a_{ij})$ で表現された作用素 T が対称であるためには，$a_{ij}=a_{ji}$ であること，したがって A が対称であることが必要十分である．形式

$$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}=\sum a_{ij}x_i x_j$$

は R_0 における作用素の**同伴形式**といわれ，二つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の関数 $F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ は**極形式**と呼ばれる．実スカラー積は可換であるから，これはまた $\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}$ とも書かれる．

固有ベクトルと固有値[1]．　T を（C_n における）エルミート作用素または（E_n における）対称作用素とする．つぎの式が成立するような零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ を作用素 T の**固有ベクトル**と呼ぶ．

(14)　$$T\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{x}.$$

数 s はその作用素の**固有値**，そして $\boldsymbol{x}$ は s に対応する**固有ベクトル**といわれる．A を R_0 に関して T に伴う行列とする．

固有値と固有ベクトルの性質

1)　n 個の固有値（実数または虚数）が存在する．実際，I を単位行列とすると，(14) は $(A-sI)\boldsymbol{x}=0$ と書かれる．左辺の n 個の座標を 0 とおくと，n 個の線型方程式が得られ，それらはつぎの関係が成立するときだけ $\boldsymbol{x} \neq 0$ である一つの解をもつ．

$$D_A(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0$$

ここで $D_A(s) = (-1)^n s^n + \cdots$ である，したがってせいぜい n 個の異なるかまたは等しい固有値が存在する．逆に，s が $D_A(s)=0$ の根ならば，$A\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{x}$ を満足する一つのベクトル $\boldsymbol{x} \neq 0$，よって s に対応する固有ベクトルが存在する．

2)　定義により，固有ベクトルと固有値は対応

(15)　$$\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$$

だけによって定まり，基底 R_0 に関してその作用素を表現している行列 A にはよらない．より正確にこの性質を表わせば，R_0 に関しての T の表現が $A=(a_{ij})$ そして同じく正規直交基底 R_1 に関しては $B=(b_{ij})$ であるときは，$D_A(s) \equiv D_B(s)$ が成立する．

3)　すべての固有値は実数である．実際，(14) より

$$\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = s\|\boldsymbol{x}\|^2,\ \text{これより}\quad s = \frac{\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2} = \frac{\Phi(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

が成立する．$\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルならば，$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ もそうである．したがって，つぎの関係が得られた．固有値 s は s に対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対するエルミート形式 $\Phi(\boldsymbol{x})$ の値である．

---

[1] A. リッチネロヴィチの“線型写像と行列”の講義を参照せよ．

4）異なる二つの固有値 s_1, s_2 に対応する二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は正規直交である.

実際, $A\boldsymbol{x} = s_1\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y} = s_2\boldsymbol{y}$ より, 極形式を考慮して式 $\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x} = s_1\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ および $A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = s_2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ が得られる. よって

$$(s_1 - s_2)\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = 0, \text{ すなわち } \quad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = 0$$

が成立する.

E_n の場合.　上に述べたことはすべて成立する. 3）の証明をつぎのように修正する. s を $D_A(s) = 0$ の一つの根とする. s が実数であっても複素数であっても, それに対して n 個の同次方程式 $sx_i = \sum_j a_{ij}x_j$ の解であるすべてが零ではない数 x_i（複素数であってもよい）が対応する. したがって,

$$\sum_{i,j} \bar{x}_i a_{ij} x_j = s \sum_i \bar{x}_i x_i = s \sum_i |x_i|^2$$

が成立する. これより　$s = \dfrac{\sum_{i,j} a_{ij}\bar{x}_i x_j}{\sum_i |x_i|^2}$.

分子は $a_{ij} = a_{ji}$ であるから実数であり, よって s は実数である. したがって対称行列の固有値は実数である.

3. 二次形式とエルミート形式の標準化

作用素 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ は $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成立するとき**ユニタリ**であるという. 行列 $A = (a_{ij})$ がユニタリと呼ばれるのは, 正規直交基底に関して $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ で定義された C_n の自己準同型写像がユニタリであるとき, すなわち $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成立するときである.

定理 2.　行列 A がユニタリであるためには, $A^*A = I$ が成立することが必要十分である. ここで I は単位行列である.

実際, A が

$$A^*A = I \tag{18}$$

を満たすならば, 随伴行列 A^* の定義自身から,

$$\|A\boldsymbol{a}\|^2 = A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot A^*A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$$

が成立する.

逆に，すべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$\|A\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{a}\|^2$ ならば，

$$\|A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\|^2=(A\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{b})\cdot(A\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{b})=\|A\boldsymbol{a}\|^2+\|A\boldsymbol{b}\|^2+A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}+A\boldsymbol{b}\cdot A\boldsymbol{a}$$
$$=\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

が成り立ち，これより，

(19) $$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}+A\boldsymbol{b}\cdot A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

(19) で $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b}'=i\boldsymbol{b}$ でおきかえると，

$$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{b}\cdot A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

二つの等式を加えて

(20) $$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

が得られる．

ゆえに，ノルムの保存性からより一般的にスカラー積の保存性が得られる．したがって

$$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot A^*A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

が成立する．すなわち任意の $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}\cdot[A^*A\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}]=0$ である．$\boldsymbol{a}$ として括弧の中のベクトルをとれば，すべての $\boldsymbol{b}$ に対して $A^*A\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=0$ が成立する，したがって (18) が成り立つ．

よってユニタリ行列は正則である，すなわちその行列式 δ は零ではない．なぜなら

$$\delta\bar{\delta}=1,\qquad |\delta|=1$$

が成立するからである．

E_n の場合．　ユニタリ自己準同型写像は，E_n を一点 O を始点とするベクトルの集合とみるとき，O のまわりの回転である．正規直交基底に関してこのような自己準同型写像を定義する行列 A は**直交行列**といわれる．定理 2（同様に証明も）はつぎのようにいい表わされる．A が直交であるためには，$A'A=1$ すなわち $A'=A^{-1}$ が成立することが必要十分である．

証明は簡単である．実スカラー積は可換的であるから，(19) から，$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ すなわち (20) が得られ，前のようにして完了する．

注　　意

1)　C_n のユニタリ変換は**ユニタリ群**と呼ばれる群をなし，同様に，E_n の直交変換は**直交群**をなす．このような群は特殊な空間である，すなわち，各作用素は n^2 個のパラメーター（すなわち行列 A の元 a_{ij}）によって決定され，第一の場合は複素数，第二の場合は

実数である．そして群の作用素 O_1，O_2 の積である作用素 $O=O_1O_2$ に対応するパラメーターは O_1 と O_2 のパラメーターの関数として解析的に得られる（積行列の項を計算すれば十分である）．このような群は**リー群**と呼ばれる．

2）　ユニタリ行列の n^2 個の元 a_{ij} は（18）が得られる関係でむすびつけられる．δ_{ij} で単位行列 I の元を表わそう（$\delta_{ii}=1$，$i\neq j$ ならば $\delta_{ij}=0$）．

（18）は

$$\sum_s \bar{a}_{si}a_{sj}=\delta_{ij} \tag{21}$$

と表わされる．逆に，（21）から $B=A^*$ に対して $BA=I$ が得られ，これより

$$A^*A=I=AA^*. \tag{22}$$

（22）の第二の等式は

$$\sum_s a_{is}\bar{a}_{js}=\delta_{ij} \tag{23}$$

に同値である．よって連立方程式（21）と（23）は同値である．直交である（a_{ij} が実数の）場合，$n=3$ のとき9個の数が直交行列の元であるための古典的な条件が得られる．

3）　それぞれベクトル e_i，e'_i からなる二つの正規直交基底 R_0, R_1 が与えられているとき，ユニタリ行列 S で

$$e'_i=Se_i$$

を満たすものが存在する．

実際，（6）より，$S=(s_{ij})$ が

$$e'_i=Se_i=\sum_j s_{ji}e_j$$

であるとき，
$$e'_i\cdot e'_k=Se_i\cdot Se_k=\sum_j \bar{s}_{ji}s_{jk}=\delta_{ik}$$

である．これは S がユニタリであることを示す．

ベクトル e_i として任意の単位ベクトルをとることによって正規直交基底を決定できる（定理1）．よって $Se_1=a_1$ を満たすユニタリ行列 S を決定できる，ここで a_1 は与えられた単位ベクトルである．

いままで述べたことは（ユニタリ行列を直交行列でおきかえて）E_n において成立し，そして幾何学的に解釈できる．

定理 3.　A がエルミート行列で S がユニタリ行列であるならば，$B=SAS^{-1}$ は

ルミート行列である.

正規直交基底 R_0 に関して, $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ がエルミート作用素であるとき, $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}$ がまたエルミート型である. すなわち

$$B\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot B\boldsymbol{y}$$

または

$$SAS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot SAS^{-1}\boldsymbol{y}$$

が成立することを証明しよう.

さて,

$$A\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot A\boldsymbol{v}$$

であるから, ここで $\boldsymbol{u}=S^{-1}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}=S^{-1}\boldsymbol{y}$ とおいて

$$AS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot S^{-1}\boldsymbol{y}=S^{-1}\boldsymbol{x}\cdot AS^{-1}\boldsymbol{y}$$

が成り立つ. また (20) によってユニタリ行列 S をそれぞれにつけてやると

$$SAS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot SAS^{-1}\boldsymbol{y}$$

が得られる.

同様に, A が対称行列で S が直交行列ならば, $B=SAS^{-1}$ は対称行列である.

注意. 作用素 (15) が正規直交基底 R_0 に関してエルミート行列 A で表現され, 基底 R_1 に関しては行列 B で表現されているときは, $D_A(s)\equiv D_B(s)$.

実際, S は R_0 を R_1 に移すユニタリ行列であるから, $B=(S^*)^{-1}AS^{-1}=SAS^{-1}$ である. これより,

$D_B=[B-sI]$ の行列式 $=[SAS^{-1}-sI]$ の行列式 $=S[A-sI]S^{-1}$ の行列式 $=D_A$.

エルミート行列の標準化. $\Phi=\sum_{i,j}a_{ij}\bar{x}_ix_j$ で形式 $\Phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}$ を表わすことにする. $A=(a_{ij})$ は正規直交基底 R_0 についてのエルミート作用素 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}$ に伴う行列, x_i は $\boldsymbol{x}$ の R_0 に関する座標, $\Phi(\boldsymbol{x})$ は R_0 について T に伴うエルミート形式であるとする.

定理 A. C_n においてつぎのような正規直交基底 R が少なくとも一つ存在する. ξ_i が R についての $\boldsymbol{x}$ の座標であるとき, $\Phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}$ が

$$\Phi=\sum_{i=1}^{p}s_i\bar{\xi}_i\xi_i \qquad p\leqq n \tag{24}$$

で表わされる．ここで s_i は実数である．

$x_i=\sum_j s_{ij}\xi_j$ で，行列 $S=(s_{ij})$ がユニタリであるとすると，$B=(b_{st})=S^*AS$ $=S^{-1}AS$ に対して $\Phi=\sum_{s,t} b_{st}\bar{\xi}_s\xi_t$ が成立する．

したがって上に述べたことはつぎの定理に同値である

定理 B.　エルミート行列 A に対して，$B=S^{-1}AS$ がつぎの対角型であるようなユニタリー行列 S が少なくとも一つ対応できる．

$$B=\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots 0 & & s_n \end{pmatrix}$$

ここで s_i は実数である．

定理 A で述べていることはつぎの性質から得られる．

補題.　$\boldsymbol{a}_1$ がエルミート作用素 T の単位固有ベクトルであり，そして $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{u}$ で $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{u}=0$ とおくと，$\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$ はつぎの形に分解される．

$$\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}=s_1x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{v}$$

ここで s_1 は $\boldsymbol{a}_1$ に対応する固有値である．さらに，つぎの性質が成立する．

1)　$\boldsymbol{v}=T\boldsymbol{u}$,　2)　$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$ と同様に $\boldsymbol{a}_1$ に直交する部分空間 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ の中にある，　3)　$\Phi=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}=s_1\bar{x}_1x_1+\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$，ここで $\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$ は空間 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ のエルミート形式である．

実際，$T(\boldsymbol{x})=T(x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{u})=x_1T(\boldsymbol{a}_1)+T(\boldsymbol{u})=s_1x_1\boldsymbol{a}_1+T(\boldsymbol{u})$.

さらに，$\boldsymbol{a}_1\cdot T(\boldsymbol{u})=T(\boldsymbol{a}_1)\cdot\boldsymbol{u}=s_1\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{u}=0$．この結果，

$$\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}=(x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{u})\cdot(s_1x_1\boldsymbol{a}_1+T\boldsymbol{u})=s_1\bar{x}_1x_1+\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}.$$

系.　$\boldsymbol{x}$ を C_n の正規直交基底で表わし，その基底は $R_1=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ で $\boldsymbol{a}_1$ は固有値 s_1 に対応する T の固有ベクトルであるとする．このときエルミート形式 $\Phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}$ はつぎのように分解される．

$$\Phi=s_1\bar{x}_1x_1+\Phi_1 \tag{25}$$

ここで $\Phi_1=\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$ は $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ における作用素 T の跡（T の $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ への制限）に対

応する高々 $n-1$ 個の変数のエルミート形式である．

実際，R_1 について $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ ならば，$\Phi_1=\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$ が成立する．ここで $\boldsymbol{u}$ と $T\boldsymbol{u}$ は座標が x_2，…，x_n の空間 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ の中にある．

吟味．　$\boldsymbol{a}_1$ と s_1（それは零であってもよい）の存在は保証されているから，Φ_1 の研究に帰着する．

a）　$\Phi_1\equiv 0$ のとき，定理 A は $p\leqslant 1$ に対して成立し，

$$R=(\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$$

である．ここで $\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ は $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{x}=0$ によって定義された $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ の任意の正規直交基底である．$k\geqslant 2$ に対して，$T\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{0}$ が成り立つ．すなわちベクトル $\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ は固有値 $s=0$ に対する T の $n-1$ 個の 固有ベクトル である．R に関して，$\Phi(\mathbf{x})=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}=s_1\bar{\xi}_1\xi_1$ および $x_1=\xi_1$ が成立し，

$$D_R(s)=(-1)^{n-1}(s_1-s)s^{n-1}$$

である．

b）　$\Phi_1\not\equiv 0$ のとき，単位ベクトル $\boldsymbol{b}_2$ を選ぶのに，$\boldsymbol{v}=T\boldsymbol{u}$ の固有ベクトルであるものをとろう．ここで T は $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ においてエルミート作用素として働いている．$\boldsymbol{b}_2$ は C_n における T の固有ベクトルでもあり，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$ に直交している．$R_2(\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ に関して

$$\Phi=s_1\bar{x}_1x_1+s_2\bar{x}_2x_2+\Phi_2$$

が得られる．Φ_2 は高々 $n-2$ 個の変数のエルミート形式 $\Phi_2=\omega\cdot T\omega$ である，ここで ω は $\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{x}=0$，$\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{x}=0$ によって定義された空間 $C_{n-1}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ の中にある．

$\Phi_2\equiv 0$ ならば，A は $p\leqslant 2$，$R=(\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ に対して成立する．ここで，$\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ は $C_{n-2}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ の任意の正規直交基底である．$\Phi_2\not\equiv 0$ ならば，前の補題と系を繰り返し適用して求める．標準形式（24）は p 回（$p\leqslant n$）の操作によって得られる．

注意．　いくつかの補足的なことがらを述べる．

1）　定理 3 を行列に利用していくと，容易に定理の（B）の形式に到達できる．$\boldsymbol{a}_1$ は今度も $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$ の単位固有ベクトル，R_1 は正規直交基底（$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$），$S$ は R_0 を R_1 に移すユニタリ変換であるとすると，

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j}a_{ij}\bar{x}_ix_j=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}\quad(R_0\text{ について})\qquad A=(a_{ij})$$

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j} b_{ij}\bar{x}'_i x'_j = \boldsymbol{x}\cdot B\boldsymbol{x} \quad (R_1 \text{ について}) \qquad B = (b_{ij})$$

であり，かつ $B = S^{-1}AS$ が成立する．

B がエルミート的であることがわかる（定理3）．$B\boldsymbol{a}_1 = s_1\boldsymbol{a}_1$ であるから，$b_{11} = s_1$，$b_{1j} = b_{j1} = 0$ $(j \geqslant 2)$，かつ $b_{11} = \overline{b}_{11}$ である，したがって固有値 s_1 が実数であることが直接証明された．B は $b'_{ij} = b_{ij}$ $(2 \leqslant i \leqslant n,\ 2 \leqslant j \leqslant n)$ からなる $(n-1) \times (n-1)$ 型のエルミート行列 $B' = (b'_{ij})$ に，上側と左側に s_1 と零を補ったものである．したがってもしも定理が $n-1$ に対して真であると仮定すれば，$\theta^{-1}B'\theta$ が実数 $s_2, \cdots, s_n$ を元とする対角行列であるような $(n-1) \times (n-1)$ 型のユニタリ行列 θ が存在し，θ の上と左側に，その対角線上には 1，他はすべて 0 を補って得られる $(n \times n)$ 型の行列 T は C_n のユニタリ行列である．$S_1 = TS$ についても同様である．したがって $B'_1 = S_1^{-1}AS_1$ は対角行列でエルミート的である．これで定理 **B** が証明された．$S_1 = (s_{ij}^{(1)})$ とすると，変換 $x_i = \sum_1^n s_{ij}^{(1)}\xi_j$ によって $\Phi = \sum_1^n s_i\bar{\xi}_i\xi_i$ が得られる．添数の順序を変更すること（これはユニタリ変換を行なうことである）により，零でない項をはじめに書くことができ，これによって定理 **A** の形式が得られる．

2）β_k を前の定理で得られた基底 R のベクトルとすると，これは T の固有ベクトルである．すなわち $T\beta_k = s_k\beta_k$．これらを $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_p$，定理 **A** で $p < n$ のときは $s_{p+1}, \cdots, s_n$ は零であるように並べたと仮定する．すると（24）からつぎの関係が成立する．

$$\|\boldsymbol{x}\| = 1 \quad \text{に対して} \quad s_1 = \max\Phi(\boldsymbol{x}), \ \text{すなわち} \quad s_1 = \max\frac{\Phi(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

$$(26) \quad \|\boldsymbol{x}\| = 1 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{x}\cdot\beta_1 = 0 \quad \text{に対して} \quad s_2 = \max\Phi(\boldsymbol{x})$$

$$\|\boldsymbol{x}\| = 1 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{x}\cdot\beta_j = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant k-1 \quad \text{に対して} \quad s_k = \max\Phi(\boldsymbol{x})$$

固有ベクトル β_k の計算のやり方は，したがって最大値（26）を実現するベクトル β_k を求めそして $s_k = \Phi(\beta_k)$ を計算することになる．

コンパクトな空間で定義され，かつ連続である多変数関数は必ずその領域内でその上限と下限をとるという定理を認めて定理 **A** の証明が得られる．

実際つぎの定理が成立する．

定理．　β_1 を単位ベクトルとし，それに対しては $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ の条件のもとで $\Phi(\boldsymbol{x})$ が最大値をとるものとする．β_2 を単位ベクトルで，それに対して $\|\boldsymbol{x}\| = 1$，$\boldsymbol{x}\cdot\beta_1 = 0$ の条件のもとで $\Phi(\boldsymbol{x})$ が最大値をとるものとし，同様に β_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ を単位ベクトルで $\|\boldsymbol{x}\|$

$=1$, $\boldsymbol{x}\cdot\beta_j=0$, $1\leqslant j\leqslant k-1$ の条件のもとで $\Phi(\boldsymbol{x})$ が最大値をとるものとする．このとき $\boldsymbol{x}=(\xi_j)$ を正規直交基底 $R(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ について表わせば，標準形式 (24) が得られる．s_k は (26) で与えられるものである．

実際，R に関して $\Phi(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j} b_{ij}\bar{\xi}_i\xi_j$ とする．(b_{ij}) は定理3によってエルミート行列である．ここで $\Phi(\beta_1)=s_1=b_{11}$ が成立し，さらに，$\|\boldsymbol{x}\|=1$ に対して $\Phi(\boldsymbol{x})\leqslant s_1$ であるから，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して

$$h(\boldsymbol{x})=\Phi(\boldsymbol{x})-s_1\|\boldsymbol{x}\|^2\leqslant 0$$

が成立する．$h(\boldsymbol{x})$ は明らかにエルミート形式である．添字 $j\geqslant 3$ の ξ_j を除くと，$h(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ は

$$h(\boldsymbol{x})=b_{12}\bar{\xi}_1\xi_2+b_{21}\bar{\xi}_2\xi_1+b_{22}\bar{\xi}_2\xi_2\leqslant 0$$

と書かれ，この不等式は任意の ξ_1, ξ_2 に対して成立する．λ が実数のとき，$\xi_2=\lambda\xi_1$ に対して λ がどんな実数であっても $|\xi_1|^2[(b_{12}+b_{21})\lambda+b_{22}\lambda^2]\leqslant 0$ が得られる，これは $b_{12}+b_{21}=0$, $b_{22}\leqslant 0$ であることを示す．λ が実数で $\xi_2=i\lambda\xi_1$ のときは，同様に $b_{12}-b_{21}=0$ が得られる．結局，当然 $b_{12}=b_{21}=0$ ということになり，同様に $j>1$ に対しては $b_{1j}=b_{j1}=0$ である．したがって形式 Φ は R に関して

$$\Phi(\boldsymbol{x})=s_1\bar{\xi}_1\xi_1+\Phi_1(\boldsymbol{x})$$

と書かれる．ここで $\Phi_1(\boldsymbol{x})$ はエルミート形式であり，変数 $\xi_2, \cdots, \xi_n$ しか含まない．$\xi_1=0$ という条件のもとでは Φ は Φ_1 になり，前の方法が今度は Φ_1 に適用できる．このようにして，つぎつぎに最大元として求められたベクトル β_k からなる基底 R に関して，Φ は標準形式 (24) になる．

3) $\Phi=\sum a_{ij}\bar{x}_i x_j$ を標準形式 (24) に変形する計算は，可換的乗法 $\bar{x}_i x_j$ を加法に関して右および左から分配的な任意の演算でおきかえてもかわらない．したがって，外積 $(\bar{x}_i\wedge x_j=-x_j\wedge\bar{x}_i)$ をとれば，つぎのようにいうことができる．エルミート形式 Φ を標準形式 (24) に移す変換 $x_i=\sum_j s_{ij}\xi_j$ は，同時に形式 $\Psi=\sum a_{ij}\bar{x}_i\wedge x_j$ を標準形式 $\Psi=\sum s_i\bar{\xi}_i\wedge\xi_i$ へ移す．

E_n の場合．　x_i と $\bar{x}_i$ を同一視できることから得られること以外には修正しなくとも，前の結果と証明はそのまま成り立つ．したがってつぎの定理が得られる．

定理．　A) E_n においてつぎのような正規直交基底 R が少なくとも一つ存在する．

それは $\boldsymbol{x}=(\xi_i)$ を R について表わすとき，対称二次形式

$$F=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

が

$$F=\sum_1^p s_i\xi_i^2, \qquad p\leqslant n$$

と書かれるものである．ここで s_i は実数であり，R のベクトル β_k は対称作用素 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ の固有ベクトルである．変換 $x_i=\sum s_{ij}\xi_j$ は直交行列 $S=(s_{ij})$ でなされたものである．

B） 対称行列 $A=(a_{ij})$ に対して，$B=S^{-1}AS$ が対角型であるような直交行列 $S=(s_{ij})$ を対応できる．

定義． 1） 零ベクトルでない任意のベクトル $\boldsymbol{x}=(x_i)$ に対して，$F>0$（または $\Phi>0$）であるとき，二次形式 F（またはエルミート形式 Φ）は**正値**であるという．

2） $F\geqslant 0$（または $\Phi\geqslant 0$）が成り立つとき，それは**半正値**であるという．

定理． F（または Φ）が正値であるためには，その階数（行列 A の階数を F の階数という）が最大 $p=n$ でありすべての固有値に対して $s_k>0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ が成立することが必要十分である[1]．

これらの結果は二次曲線と二次曲面の方程式を主軸について標準化することに応用でき，それを分類することはその形式の階数と符号数の概念に基づいている．二次曲面に関しての注意を述べる．s についての方程式の根 s_k はつぎのようなパラメーター s の値で，それに対しては同次座標 x_1, x_2, x_3, x_4 について $F(x_1, x_2, x_3, x_4)+s\sum_1^3 x_i^2=0$, $x_4=0$ で定義された無限超平面における二次曲線束が分解される[2]．したがって，まずつぎの形で表わされる，二次形式 F に伴う対称変換 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ の固有値 s_k は，それに対して形式 $F_s=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)+s\sum_1^n x_i^2$ の階数が n より小さくなるような値であってかつそのようなただ一つのものである．つぎに，階数 $p\leqslant 2$ の形式は明らかに実または共役な二つの線型形式の積であることを注意している，この結果を利用することになる．

---

1) たとえば，佐武一郎著“行列と行列式”（裳華房）161ページ参照．［訳注］

2) たとえば前掲書185ページ，または森本清吾著“座標幾何学”（共立全書）第3章，§2参照．［訳注］

参考文献

〔1〕 H. WEYL—*Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Leipzig, 1931 (Edition américaine chez Dover).

〔2〕 G. JULIA—*Introduction mathématique aux théories quantiques*, Gauthier-Villars, 1936.

〔3〕 A. LICHNEROWICZ—*Algèbre et analyse linéaires*, Masson.

〔4〕 C. CHEVALLEY—*Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, 1946.

〔5〕 R. FORTET—*Espaces vectoriels*, Cours de M. M. P. édité par le Centre de documentation universitaire, Paris.

典　型　群

ポァティエ大学教授

L. ルジール

1. 体 K 上の n 変数の線型群

可換体 K の n 個の成分のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ からなる線型空間を $K^n=E$ とする．

$$\begin{cases} x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ x_2'=a_{21}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n'=a_{n1}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{nn}x_n \end{cases}$$

で定義された線型変換 $\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ を考えよう，ここで係数 a_{ij} は体 K に属する．

行列式が零でない行列 A の変換は群をなす．それを K 上で定義された n 変数の**一般線型群**といい，$\mathrm{GL}_n(K)$ で表わす．

特に行列式が 1 である線型変換は一般線型群の部分群をなす．それを K 上で定義された n 変数の**特殊線型群**または**ユニモジュラ群**と呼び，$\mathrm{SL}_n(K)$ で表わす．

ここで考察しようとする，H. ヴァイル〔1〕以来典型的と名づけられている群は，K が複素数体または実数体 R である一般線型群のすべての部分群のことである．任意の体の場合はつい最近の研究の対象であり，その主要な結果はファン・デル・ヴェルデン〔2〕と〔3〕, J. ディュドネ〔4〕と〔5〕の著作にまとめられている．

2. 対合的線型変換

これはその逆と一致するような線型変換である．すなわちその行列 A が

$$A^2=I,\qquad ここで\ I\ は単位行列を表わす$$

を満足するようなものである.

この式から，$(\det A)^2 = 1$ でありAの逆行列が存在する.

行列は加法と乗法に関して環構造をもっているから，等式 $A^2 = I$ は

$$A^2 - I = 0, \quad \text{または} \quad (A - I)(A + I) = 0$$

と書かれる.

これによって

$$(A - I)\boldsymbol{x} = 0, \quad \text{すなわち} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

であるベクトル $\boldsymbol{x}$ と，

$$(A + I)\boldsymbol{y} = 0, \quad \text{すなわち} \quad A\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}$$

であるようなベクトル $\boldsymbol{y}$ を考えることに導かれる.

最初のものは E の部分線型空間 V を，第二のものは部分線型空間 W を形成する．二つの部分空間 V と W は零ベクトル以外にはいかなる共通なベクトルも含まない．なぜなら，

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ならば $A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$，すなわち $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{y}$ である．したがって $2\boldsymbol{x} = 0$ で $\boldsymbol{x} = 0$ である．この2で割ることは標数が2でない任意の体に対して許されるからである.

他方，V と W は空間 E を生成する．すなわち E のすべてのベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in V, \ \boldsymbol{y} \in W$$

と表わされる．実際，

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v})$$

と表わことで十分である．$\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{v}$ は V に属すことが示される．なぜならば $A(\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}$ であるからである．また $\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v}$ は W に属す．なぜならば $A(\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v})$ だからである.

この二つの性質は式

$$V \cap W = 0, \qquad V \cup W = E$$[1]

で表わされ，このとき V と W は**補空間**であるといわれる.

したがってつぎの定理が成立する.

---

[1] 記号∪は集合論の合併の記号ではなく，束論の結びの記号である．線型空間は包含関係によって順序がつけられ束である．線型空間 E の二つの部分空間 A と B に対して，束としての交わり $A \cap B$ は部分空間であるから，集合としての共通部分に一致する．束としての結び $A \cup B$ は A と B を含む最小の部分線型空間である.

定理 1.　A が対合的線型変換であるとき，二つの補部分空間 V と W が存在し，それは V のすべてのベクトルに対しては $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ が成立し，W のすべてのベクトルに対しては $A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ が成立するようなものである．

V が p 次元であるとき，W は $n-p$ 次元である．V において基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_p$，$W$ において基底 $\boldsymbol{e}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を選ぶと，変換の方程式はつぎの形になる．

$$(1)\quad \begin{cases} x_1'=x_1 \\ x_2'=\quad x_2 \\ \vdots \\ x_p'=\qquad\quad x_p \\ x_{p+1}'=\qquad\qquad -x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n'=\qquad\qquad\qquad -x_n \end{cases}$$

E^3 についての例

$$\begin{cases} x_1'=x_1 \\ x_2'=x_2 \qquad \text{（平面 } \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2 \text{ に関しての } \boldsymbol{e}_3 \text{ に平行な対称変換）} \\ x_3'=-x_3 \end{cases}$$

3. 直 交 群

二次形式

$$\varphi(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

を不変に保つ線型変換を**直交変換**と呼ぶ．

対応する行列 A は**直交行列**といわれる．A が直交行列であるためには，

$$A^{\tau}A=I$$

が成立することが必要十分である．ここで A^{τ} は A の転置行列（主体角線に関して対称に変換して A から導かれた行列）を表わす．

$n=2$　に対してこれを証明しよう．変換

$$\begin{cases} x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{cases}$$

が任意の x_1，x_2 に対して　$x_1'^2+x_2'^2\equiv x_1^2+x_2^2$

を満足するための条件は

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

これは

$$A^\tau A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ が単位行列 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ である}$$

ことを示している.

これより $\det A = \pm 1$ が得られる.

この結果, 直交行列の逆行列が存在する. その逆行列はその転置行列 A^τ で, また $AA^\tau = I$ を満足し, したがってまた直交行列である.

二つの直交変換の積はまた一つの直交変換であるから, 直交変換は群をなす. それを**直交群**と呼び, $\mathrm{O}_n(K)$ で表わす. 行列式が $+1$ である直交変換は**回転**と呼ばれ, 部分群 $\mathrm{O}_n^+(K)$ を形成する, また行列式が -1 である直交変換は**裏返し**[1] と呼ばれる (これはもちろん部分群をなさない).

実数体 R に対応する実直交群 $\mathrm{O}_n(R)$ は明らかに K が複素数体であるときの $\mathrm{O}_n(K)$ の部分群である.

性質. 直交変換は二つのベクトルのスカラー積を保存する.

ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のスカラー積とは, 式

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

で, 二つのベクトルの座標の対称双線型形式である.

実際, この形式は二つの行列の積として表わされる.

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^\tau \cdot Y$$

変換 A によって, これは (結合律によって)

$$(AX)^\tau \cdot AY = (X^\tau A^\tau)(AY) = X^\tau \cdot (A^\tau A) \cdot Y = X^\tau \cdot Y$$

となる.

部分空間 V の共役部分空間. すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

が成立するようなベクトル $\boldsymbol{y}$ からなる部分空間 V^* である.

---

[1] 鏡映, 鏡映変換とも呼ばれる. [訳注]

これは部分空間である．なぜなら f が双線型であるからである．そしてこの関係は対称だから V は V^* の共役空間である．

V が一つのベクトル $\boldsymbol{x}$ だけしか含まないならば，V^* は直交する超平面である．より一般的に，V が p 次元ならば，V^* は $n-p$ 次元である．（実際，V が p 個の独立なベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p$ で定義されているときは，V^* は p 個の独立な超平面 $f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y})=0$，$i=1, 2, \cdots, p$ の共通部分である．）

K が実数体のとき，$V \cap V^*=0$ が成立し二つの共役な部分空間は補空間である．K が複素数体のときはそうではない．この場合，$V \cap V^* \neq 0$ であるような部分空間 V が存在し，それを**等方部分空間**と呼ぶ．

4. 対合的直交変換

A を対合的直交行列とする（したがってそれは $A^2=I$ を満足するから，$A=A^{-1}=A^\tau$）．これは定理 1 が適用できる特別な対合的変換である．

V と W が共役であることを証明してこの定理の結果を精密にしよう．

$\boldsymbol{x} \in V$ と $\boldsymbol{y} \in W$ のスカラー積は

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=f(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})=-f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

これより $2f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$ であり，標数が 2 でない体 K に対しては $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$.

したがって $\boldsymbol{y} \in V^*$，よって $W \subseteqq V^*$．W と V^* は同じ次元 $n-p$ であるから，$W=V^*$．ゆえに V と W は共役である．

他方，$V \cap W=0$ であることはわかっているから，$V \cap V^*=0$，この結果 V は等方空間でない．W についても同様である．これより，

定理 2.　A が対合的直交変換のとき，V のすべてのベクトルに対しては $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ であり，共役な部分空間 V^* のすべてのベクトルに対しては $A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ であるような等方的でない部分空間 V（0 だけであってもよい）が存在する．

V において正規直交基底をとり，W においても正規直交基底をとると，変換の方程式が (1) の形をとるような正規直交基底が E において得られる．変換は $n-p$ が偶数であるか奇数であるかによって回転または裏返しである．

5. 対 称 変 換

特に，V が $n-1$ 次元のとき，対合的直交変換は V を不変に保つ．それは超平面 V（等方的でないことはわかっている）に関しての**対称変換**であるといわれる．対称変換によって直交変換を生成する初等的な幾何学で知られた定理[1] が任意の n に対して一般化された，複素数体 K または実数体 R の場合は E. カルタン〔6〕によるし，標数が 2 でない任意の体については J. ディユドネによる．これはつぎの性質である．

定理 3.　n 変数のすべての直交変換は高々 n 個の対称変換の積である．

これを実数体の場合について，n についての帰納法で証明する．$n=1$ に対してはこの性質はただちに得られる．$n-1$ に対して真であると仮定する．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ であるような一つのベクトル $\boldsymbol{x}\neq 0$ が存在するときは，A は $\boldsymbol{x}$ に共役な超平面 H を全体としてかえない，そして A の H への制限は高々 $n-1$ 個の対称変換の積である直交変換である．これによって高々 $n-1$ 個の E における対称変換が定義される．0 と異なるすべてのベクトルが不変でないときは，任意のベクトル $\boldsymbol{x}_0$ をとると，$A\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{x}_0$ であり，これに対して

$$\varphi(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0)=\varphi(A\boldsymbol{x}_0)$$

が成立する．

方程式が $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0-A\boldsymbol{x}_0)=0$ で表わされる超平面によって，$\boldsymbol{x}_0$ を $A\boldsymbol{x}_0\neq 0$ に変換する対称行列 S が定義される．積変換 $S\circ A$ は $\boldsymbol{x}_0$ を不変にするから，前に述べたことから高々 $n-1$ 個の対称行列の積である．これより A が高々 n 個の対称行列の積であることが得られた．

6. ユ ニ タ リ 群

K を複素数体として，空間 $E=K^n$ をふたたびとろう．今度はエルミート形式

$$\varphi(\boldsymbol{x})=x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\cdots+x_n\bar{x}_n$$

---

[1] 平面（2 次元空間）での直交変換は一つの座標軸（たとえば 1 次元部分空間 $R\boldsymbol{e}_1$）に関しての裏返し，および原点のまわりの角 θ の回転であるが，第 1 のものは対称変換であり，第 2 のものは第 1 座標軸（$R\boldsymbol{e}_1$）に関する裏返しとその座標軸と $\frac{\theta}{2}$ の角をなす直線に関する裏返しの積である．［訳注］

を考える，ここで $\bar{x}_i$ は x_i の共役な複素数を表わす．ユニタリ変換とは $\varphi(\boldsymbol{x})$ を不変に保つ線型変換である．その行列 A は関係

$$\bar{A}^{\tau}\cdot A = I$$

を満足する，ここで $\bar{A}^{\tau}$ は A の共役の転置行列を示す．したがって行列 A は逆行列をもち，その逆行列は $\bar{A}^{\tau}$ で，$A\cdot\bar{A}^{\tau} = I$ を満たし，それはまたユニタリ行列である．二つのユニタリ変換の積はまたユニタリであるから，ユニタリ変換は群をなす．それは**ユニタリ群**と呼ばれ，$\mathbf{U}_n(K)$ で表わす．

ユニタリ変換は式

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

を不変にする．この式は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**エルミート・スカラー積**と呼ばれる．これは二つのベクトルの双線型形式であり，それは対称ではないが

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$$

を満足する．したがって条件 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ と $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$ とは同値である．この性質によって共役な部分空間 V と V^* が定義でき，そしてすべてのユニタリ変換の構造を得るために定理 3 をユニタリ群に拡張することができる．

行列式が 1 に等しいユニタリ変換はユニタリ群と特殊線型群の部分群である．それは**特殊ユニタリ群** $\mathbf{SU}_n(K)$ である．

7. 斜　交　群

空間 E の次元は偶数 $n = 2m$ であると仮定する．このときベクトル $\boldsymbol{x}$ の座標は $x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots, x_m, x_m'$ とする．

二つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1' - x_1' y_1 + x_2 y_2' - x_2' y_2 + \cdots + x_m y_m' - x_m' y_m$$

を対応させる．これは二つのベクトルの交代双線型形式である．すなわち

$$f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を不変に保つ線型変換を**斜交変換**と呼ぶ．したがってそれは

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$$

で定義される．行列 A を**斜交行列**という．二つの斜交変換の積はまた斜交変換である．

これらの変換が群をなすことを証明するために，それらが逆変換をもつことを示そう．

$n=2$ の場合，これらの変換は向きのついた面積を不変に保つものに他ならない．したがって特殊線型群 $\mathbf{SL}_2(K)$ の変換である．一般に $n=2m$ の場合，行列 A の列ベクトルを考えよう．すなわち，

$$\vec{\alpha}_1 = Ae_1,\ \vec{\alpha}'_1 = Ae'_1\ ,\cdots,\ \vec{\alpha}_m = Ae_m,\ \vec{\alpha}'_m = Ae'_m.$$

関係　$f(e_i, e_j) = 0,\ f(e_i, e'_j) = \delta_{ij},\ f(e'_i, e'_j) = 0$

（ここで δ_{ij} は $i=j$ のときは 1，$i \neq j$ のときは 0 である）

より，

$$f(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j) = 0,\ f(\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}'_j) = \delta_{ij},\ f(\vec{\alpha}'_i,\ \vec{\alpha}'_j) = 0$$

が導かれる．これは A が斜交行列であるための必要十分条件である．ところで，ベクトル $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}'_1, \cdots, \vec{\alpha}_m, \vec{\alpha}'_m$ は独立である．なぜならば $x = \lambda_1\vec{\alpha}_1 + \lambda'_1\vec{\alpha}'_1 + \cdots + \lambda_m\vec{\alpha}_m + \lambda'_m\vec{\alpha}'_m$ が零であるような λ が存在するならば，$f(x, \vec{\alpha}'_1) = \lambda_1 = 0$ が得られ，同様にすべての i に対して $\lambda_i = \lambda'_i = 0$ が得られるからである．したがって，行列 A の逆行列が存在し，その逆行列はまた $f(x, y)$ を不変に保つから斜交である．したがって，斜交変換は群をなす．それを**斜交群**と呼び $\mathbf{S}_p(n, K)$ と表わす．

直交群の場合と同様に，共役部分空間の概念を $V \cap V^* \neq 0$ であるような等方的部分空間 V に共役なものとして定義する．

対合的斜交変換．　定理 2 は同じ証明を用いて斜交群にも拡張できる．対合的斜交変換の構造にでてくる空間 V と W は偶数次元であるという補足的な精密さを与えることができる．

実際，V と W は等方的ではなく奇数次元の部分空間は必ず等方的になる．基底 $e_1, \cdots, e_{2p+1}$ で定義されたこのような空間 U は，実際零でないベクトル

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{2p+1} e_{2p+1}$$

を含む．なぜならば $2p+1$ 個の同次方程式の連立方程式

$$f(x, e_i) = \lambda_1 f(e_1, e_i) + \cdots + \lambda_{2p+1} f(e_{2p+1}, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 2p+1$$

は奇数次の交代行列式をもつ，したがってそれは零である．ゆえにこの連立方程式は零でない一つの解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2p+1}$ が存在し，これによって零でないベクトル x が与えられる．

特に，すべてのベクトルは等方的であり，またすべての超平面についても同様である．

8. 斜 交 移 換[1)]

すぐ前で述べたことは斜交的な《対称変換》が存在しないことを示しているが，超平面のベクトルを不変にする直交変換として直交対称変換を考えることができた．それと同様に超平面のベクトルを不変に保つ斜交変換を求めることが問題になる．

A をこのような変換とし，H を超平面，$\boldsymbol{x}_0$ を H 上にないベクトルとする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_0$ であるような H のベクトル $\boldsymbol{h}$ が対応する．したがって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + r(\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x}_0$，これらを辺々引いて

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}, \qquad \text{ここで} \quad \boldsymbol{a} = A\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0.$$

このベクトル $\boldsymbol{a}$ は H の共役である．なぜならば A の定義により H の任意のベクトル $\boldsymbol{e}$ に対して

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}) = f(A\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e}) = f(A\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e}) - f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e}) = 0$$

が成立するからである．しかし，すべてのベクトルは等方的であるから，$\boldsymbol{a}$ が H に属すことになる．したがって，すべての変換 A に対して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_0$，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$ であるようなHに共役なベクトル $\boldsymbol{a}$ と H に属さないベクトル $\boldsymbol{x}_0$ が存在する．この二つの公式によって求める変換が定義される．逆に，H に属さない $\boldsymbol{x}_0$ と H の共役である $\boldsymbol{a}$ を含んだこの公式によって定義された変換は，Hのすべてのベクトルを不変にする斜交変換である．なぜなら

$$f(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + r(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) + r(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成立するからである．

$2m-1$ 個の $\boldsymbol{e}_i$ を H の基底をなしているベクトル（$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}$ と仮定する），ベクトル $\boldsymbol{e}_{2m}$ をH上にないものとすると（$\boldsymbol{e}_{2m} = \boldsymbol{x}_0$ と仮定する），前の公式によって $\boldsymbol{h} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_{2m-1}\boldsymbol{e}_{2m-1}$，$r(\boldsymbol{x}) = x_{2m}$ が得られる．したがって，$A\boldsymbol{x}$ の座標は

$$X_1 = x_1 + x_{2m},\ X_2 = x_2,\ \cdots,\ X_{2m-1} = x_{2m-1},\ X_{2m} = x_{2m}.$$

このようにして得られた変換は超平面 H の**斜交移換**と呼ばれる．上記の方程式によって A の行列式は 1 であることがわかる．

与えられたベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を $f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$ であるような与えられたベクトル $\boldsymbol{y}_0$ 上に写像する斜交移換を定めることができる．実際，前に述べたことから，超平面 H は $\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0$ の共役でなければならない．この超平面は $\boldsymbol{x}_0$ を含まず，そして A は

---

1) 斜交ずらしともいう．［訳注］

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_0, \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} + r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_0$$

によって定義される.

9. 斜交群の生成

定理 4.　すべての斜交変換 A は有限個の斜交移換の積である.

まずはじめに，すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = 0$ が成立すると仮定しよう．すると A は対合的である．なぜなら，$f[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})] = 0$ から，$f(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = f(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{y})$，そしてベクトル $A\boldsymbol{x}$ は任意であるから，$\boldsymbol{y}$ がなんであっても，$A^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$，したがって $A^2 = I$ が導かれる．逆は $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ より得られる．これより，

補題 1.　すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = 0$ ならば，A は対合的であり，また逆も成立する.

この場合，対合的斜交変換の構造の中にでてくる二つの部分空間 V と $W = V^*$ を考えることができる．$A \neq I$ と仮定すると，$W \neq 0$ が成立する．W は偶数次元であり等方的でないから，$f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$ であるような二つのベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{y}_0$ を W の中に見つけることができる．$A\boldsymbol{x}_0 = -\boldsymbol{x}_0$（これは $\boldsymbol{x}_0 \in W$ を示している）より，$f(A\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$ が導かれ，そして $A\boldsymbol{x}_0$ を $\boldsymbol{y}_0$ に変換する斜交移換 T が存在する．同様に，$f(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0) \neq 0$ より $\boldsymbol{y}_0$ を $\boldsymbol{x}_0$ に変換する斜交移換 T' の存在が導かれる．この結果 $T'TA$ が $\boldsymbol{x}_0$ を不変に保つことになる.

一般の場合にもこの結果が成立することを証明しよう.

補題 2.　A が斜交変換であるとき，$T'TA$ が少なくとも一つのベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を不変にするような二つの斜交移換 T と T' が存在する.

この性質は A が対合的であるときは証明されたばかりである．対合的でないときは，補題1により $f(\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ であるようなベクトル $\boldsymbol{x}_0$ が少なくとも一つ存在する．したがって，積 TA が $\boldsymbol{x}_0$ を不変にするような，$A\boldsymbol{x}_0$ を $\boldsymbol{x}_0$ に変換する斜交移換 T が存在する.

したがってベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を不変にする斜交変換を B とする.

a)　まず

$$f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0, \qquad \text{かつ} \quad f(\boldsymbol{y}_0, B\boldsymbol{y}_0) \neq 0$$

であるようなベクトル $\boldsymbol{y}_0$ が存在すると仮定しよう．$B\boldsymbol{y}_0$ を $\boldsymbol{y}_0$ に変換し，積 T_1B が $\boldsymbol{y}_0$ を不変に保つような斜交移換 T_1 が存在する．ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ はこの積によってまた不変である．これを証明するためには，それは移換 T_1 によって不変な超平面の中にある．すなわちそれはベクトル $B\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{y}_0$ の共役であることを証明すれば十分である．これは等式

$$f(\boldsymbol{x}_0, B\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{y}_0)=f(\boldsymbol{x}_0, B\boldsymbol{y}_0)-f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)=f(B\boldsymbol{x}_0, B\boldsymbol{y}_0)-f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)=0$$

から得られる．

補題2を与えられた条件の場合だけでなしに，より完全に述べたつぎの場合にも証明できた．

補題 3.　$f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0$ かつ $f(\boldsymbol{y}_0, B\boldsymbol{y}_0)\neq 0$ であるようなベクトル $\boldsymbol{y}_0$ が存在するならば，それと A との積が二つのベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{y}_0$ を不変にするような斜交移換の積が存在する．

b)　今度は $f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0$ であるようなすべてのベクトル $\boldsymbol{y}_0$ に対して，$f(\boldsymbol{y}_0, B\boldsymbol{y}_0)=0$ が成立すると仮定しよう．$B\boldsymbol{y}_0$ を $\boldsymbol{y}_0$ ではなしに $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0$ に変換する斜交移換を用いよう．この変換 T は

$$f(B\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0)=f(B\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0)\neq 0$$

であるから，確かに存在する．このとき，積 $T\cdot B=C$ は $\boldsymbol{y}_0$ を $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0$ に変換し，そして

$$f(\boldsymbol{y}_0, C\boldsymbol{y}_0)=f(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0)=f(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0)\neq 0.$$

C は $\boldsymbol{x}_0$ を不変に保つ．なぜなら

$$f(\boldsymbol{x}_0, B\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0)=f(\boldsymbol{x}_0, B\boldsymbol{y}_0)-f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)=0$$

が成立し，$\boldsymbol{x}_0$ がその移換によって不変な超平面に属すからである．したがってベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{y}_0$ は

$$f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0 \quad かつ \quad f(\boldsymbol{y}_0, C\boldsymbol{y}_0)\neq 0$$

を満たすものである．

これは補題3の条件であり，これによってつぎの補題が成り立つ．

補題.　A を任意の斜交変換とするとき，それと A との積が $f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0$ であるような二つのベクトル $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{y}_0$ を不変にする斜交移換の積が存在する．

このことから，定理4をつぎの方法で導くことができる．$f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0$ であり，かつ

C によって不変であると仮定された $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{y}_0$ によって決定された平面を P とする．この平面は等方的ではなく，P に共役な部分空間 P^* は P の補空間である．ところで P^* の次元は $2m-2$ である．変換 C は P^* を不変に保ち，それのこの部分空間への制限は前のような調べようとする斜交変換である．もしもこの制限が斜交移換の積であれば，それは E の斜交移換の制限であるから定理は証明される．そこで，m についての帰納法によって 2 次元の空間に帰着され，この場合は補題によって結論することができる．したがって定理は証明された．

定理 4 の結論として，すべての斜交変換の行列式は 1 であることを注意しよう．すなわち斜交群 $\mathbf{S}_p(n, K)$ は特殊線型群 $\mathbf{SL}_n(K)$ の部分群である．

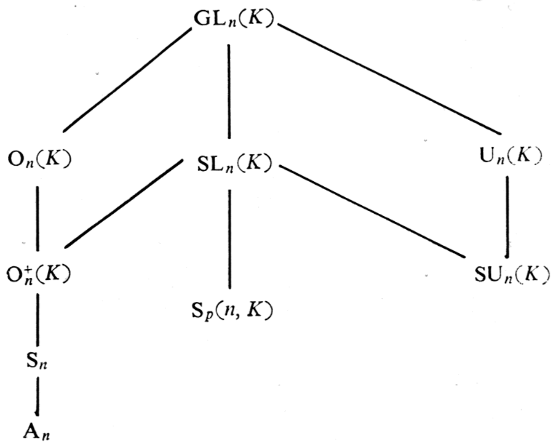
10. 対 称 群

n 個の元の有限集合の置換のなす群を**対称群** $\mathbf{S}_n$ と呼ぶ．したがってこれは $n!$ 個の元をもつ有限群である．これは K^n の線型変換によって実現できる．実際，たとえば三つの元 (x_1, x_2, x_3) の集合を考えるとき，置換 $\{x_1, x_2, x_3\} \longrightarrow \{x_3, x_2, x_1\}$ は

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

によって実現される．それは各行と列に一つだけ零でない，すなわち 1 である元からなる行列によって表現される．これは n がなんであっても成立する．この結果，群 $\mathbf{S}_n$ は直交群の部分群と考えることができる．この群の回転は $n!/2$ 個であり，それは偶置換に対応し $\mathbf{S}_n$ の部分群をなす，すなわち**交代群** $\mathbf{A}_n$ である．

この群についての概略的な研究，および表現論への手引と物理学への応用については〔7〕で，直交群とユニタリ群の演算法への応用については〔8〕で見ることができる．いくつかの問題を参考文献のあとにのせてある．終わりにこの講義ででてきた群のダイアグラムを示そう．



参 考 文 献

〔1〕 H. WEYL—*The classical groups* (Princeton, 2e édition, 1946).

〔2〕 B. L. VAN DER WAERDEN—*Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Ergebnisse der Math., 1932).

〔3〕 B. L. VAN DER WAERDEN—*Gruppen von linearen transformationen* (Ergebnisse der Mathematik, 1935).

〔4〕 J. DIEUDONNÉ—*Sur les groupes classiques* (Paris, Hermann, 1948).

〔5〕 J. DIEUDONNÉ—*La géométrie des groupes classiques* (Ergebnisse der Mathematik, 1955).

〔6〕 E. CARTAN—*Leçons sur la théorie des spineurs* (Act. Sc. et Ind., n°643, p. 13—17).

〔7〕 *Conférence du Séminaire de Mathématique de la Faculté des Science de Poitiers* (1954～1955).

〔8〕 M. JANET—*Précis de Calcul matriciel et opérationnel* (Presses Universitaires, Collection Euclide, 1954).

問 題

1. Rが裏返しであるならば，$Rx=-x$ であるようなベクトル $x \neq 0$ がいつでも存

在する．すなわち，-1 が任意の裏返しの行列の固有値である．

2.　n が奇数のとき，回転はいつでも原点を通る不変な点からなる軸をもつ．すなわち，$+1$ は n が奇数であるときの回転の行列の固有値である．

3.　直交行列の固有値，すなわち方程式 $\det(A-sI)=0$ の根はすべて絶対値 1 の複素数であることを証明せよ．

4.　V と V^* を対合的直交変換の構造の中にでてくる部分空間とする（定理 2）．V^* が 2 次元，よって V は $n-2$ 次元であるが，このとき軸 V の裏返しと呼ばれる回転が得られる．$n>2$ のとき，すべての回転は裏返しの積であることを証明せよ．

5.　前回の記号を用いる．V が直線で V^* が超平面であるとき，n が奇数であるか偶数であるかによって回転または裏返しが得られる，それを軸 V の転置という．n が奇数のとき，すべての回転は転置の積であることを証明せよ．また n が偶数のときは，すべての裏返しは転置の積であることを示せ（$n\geqslant 3$）．

6.　特殊ユニタリ群のすべての行列は $n=2$ のとき，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ で与えられることを証明せよ．ここで複素数 a と b は $a\bar{a}+b\bar{b}=1$ を満たすものである．

7.　J を $2m$ 次元の正方行列で，主対角線上に m 個のブロック $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が並んでいるものとする，たとえば，

$$J=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

ある行列 A が斜交行列であるためには

$$A^{\tau}JA=J$$

が成り立つことが必要十分であることを証明せよ．

8.　ある変換が斜交でありかつ同時に対合的であるためには

$$A^2=I, \qquad A^{\tau}J=JA$$

と書けることが必要十分であることを証明せよ．ここで J は前問の行列である．

9.　基底が $e_1, e_1', e_2, e_2', \cdots, e_m, e_m'(n=2m)$ である $E=K^n$ において，e_j と e_j' から斜交変換によって導かれたすべての基底 $Ae_i(i=1,\cdots,2m)$ を斜交基底（または枠）と呼ぶ．x_1 と x_1' を $f(x_1,x_1')$ が零でないような任意の二つのベクトルとするとき，そのはじめの二つのベクトルが x_1, x_1' であるような斜交基底が存在することを示せ．

10.　行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ は斜交移換（$n=2$）の行列であることを示せ．$-I=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は三つの斜交移換の積 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを証明せよ．

斜交変換 $-I$ は二つだけの斜交移換の積として表わされるか．

射影空間

ポァティエ大学教授

A. ルヴユ

パリ高等理工科学校（エコール・ポリテクニック）入学志願の優秀な学生は，実射影空間，さらには複素射影空間さえも正しく利用することを知っている．しかし，最初にそれを学ぶときにはいつでも不安が伴い，しかもその不安は，私の個人的経験を考えると，相当ながびく．ここでのわたくしの講義は，射影空間についての技術を拡げることよりも，射影空間が導かれるもとの空間に関連して射影空間を正確に位置づけ，それによって不安の原因を説明しそして不安を解消するのがねらいである．

無限遠点の導入は，自然数から複素数までの数の概念の一連の拡張ではだれもが示さなかった困難に出会う．第一の困難は，これらの拡張のいずれもが，すでに存在していた元がもっている性質をなんら失うことなしに（実数から複素数へ拡張するときの順序体の構造以外は），創造した元の新しい性質を得ることができたのに反して，一つの（または二つの）無限遠点の導入はほとんど全面的に実数直線の代数構造を破壊してしまうことである．このことはしばしば初等クラスで非常に省略して《無限は数ではない！》と宣言することで表わすことにほかならない．第二の困難は，拡張の一意性に関係している．それは数の概念の拡張に対しては保証されているが［より正確には，たとえば，自然数を含んでいるすべての最小のアーベル群は（加法に対して）有理整数の群に同型であることが成立する］，無限遠にある元に対してはもはや成立しない．確固とした基礎がないから，生徒は有限の距離では一致している複素変数の平面と解析幾何学の平面がどうして一方が一つの無限遠点をもち，他方が一つの無限遠直線をもつかというようなあいまいな問題で狼狽する．

1. 射影空間の定義

a）一つの平面から他の平面上への配景法による導入．P と P' を平行でない二つの平面，O を視点とする．このとき不愉快な例外にぶつかる．すなわち，P 上の一直線でその上のすべての点 M が像をもたないようなものが存在し，また P' 上の一直線でその上のすべての点は P 上の点の像にはなっていないものが存在する．しかるに，他の点については，P の点 M に対しては直線 OMM′ と P' の点 M′ の対応が存在し，これらの元のうちの一つは他の二つのものによってただ一通りに定まるものである．しかし，上に示した例外では，二点 M, M′ のうちの一つだけしか存在しないが，O からでる直線はいつでも決定される．したがって P または P' 上の点ではなしに，O を通る直線を扱うことによってこの例外をさけることができる．つぎの定義が与えられる．

二次元の射影空間 P_2 は三次元ユークリッド空間 R^3 の中の一点 O を通る直線の集合である．P_2 の射影的直線は O を通る平面である．

一般化．　可換的または非可換的な任意の体 K と，各因数が K である $n+1$ 個の因数の積であり，$n+1$ 次元の K 上のすべての左[1] 線型空間と同型である左線型空間 K^{n+1} が与えられているとき，K 上の n 次元左射影空間を $P_n(K)$ で表わす．それは K^{n+1} の同次の直線の集合である，すなわち一次元部分空間である．

b）同次座標による導入．今度はより解析的な観点で表わそう．K^*_{n+1} を K^{n+1} から原点を除いて得られた空間とする（K^*_{n+1} のように下に添数をつけた場合はより低次元の類似な空間の積ではない）．K^*_{n+1} の中に，K^*_{n+1} の零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{y}=t\boldsymbol{x}$ となる零でない $t\in K$ が存在するときにかぎって同値であるとする同値関係 Δ_n を導入しよう．

同値類は，原点を除いた K^{n+1} の同次の直線からなる．したがって，$P_n(K)$ と商空間 K^*_{n+1}/Δ_n のあいだに一対一対応が存在し，それによってそれらを同一視できる．

K^*_{n+1} の元がそれらの座標 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ で与えられているとき，P_n の元は一つの倍数の違いを無視して $n+1$ 個の確定した元 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ によって与えられる．それは《同次座標》の系である．

---

[1] または右．

2. 射影空間の構造

もとの線型空間の構造の演算によって何が得られるか．群から出発してその群の演算に関して正規な同値関係によって商を考えると，また一つの群，すなわち商群が得られる．しかしここでは，群としてのその演算の中立元を除いた線型空間から出発したが，さらに同値関係はこの演算に関して正規ではない（$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}'$ に同値，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}'$ に同値であることから $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$ に同値であるとはいえない）．スカラーによる積では，同じ同値類の元にとどまるだけで射影空間における演算にはならない．

それではそのまま成立するものは何か．われわれの考察の始めに帰って一つの平面から他の平面上への配景法を考えよう．そのまま成立するのは点の配列である．より一般の空間で，もしも K^*_{n+1} の p 個の元が線型独立ならば，すなわち $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_p\boldsymbol{x}_p=0$ のときはいつでも $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=0$ であるならば，それぞれ前の元に同値な p 個の元 $\boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_p$ についても明らかに線型独立であることが認められる．このとき対応する同値類を P_n の射影的に独立な点という．

射影的線型多様体． φ を K^*_{n+1} の各元 $\boldsymbol{x}$ を Δ_n を法とする類に対応させる K^*_{n+1} から P_n の上への標準的写像とする．《射影的存在》を φ による K^*_{n+1} の《線型的存在》の像として系統的に定義しよう．したがって，p 次元の射影的線型多様体は K^*_{n+1} の p 次元部分空間 V_p の標準的像 $\varphi(V_p)$ である．その結果，もしも P_n の p 個の点が射影的に独立ならば，それらを含む最小の射影的線型多様体は $p-1$ 次元である．

射影空間の別の公理化． 射影的独立というものは射影空間の理論はそれだけから作られるものであるから，射影空間で存在するただ一つの概念である．これについての優れた説明はルジール[1] によってなされた．しかしながら彼は独立性を順序構造を使って定義している．

最初に注意すべきことは，たとえば $P_3(R)$ の射影的線型多様体の集合は空集合と $P_3(R)$ 全体を含んでおり，包含関係によって順序がつけられて束をなすということである．すなわち，二つの多様体 A と B が与えられているとき，A と B に含まれている多様体の中で最大のものが存在する，それを $\inf(A, B)$ または $A\cap B$ と表わし，それらの交わり[1] という．さらに A と B を含む多様体の中で最小のものが存在する，それを $\sup(A, B)$ ま

---

[1] M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT : *Théorie des Treillis.* Paris, 1953, pp. 249～371. "現代数学概説 I"（岩波書店）第4章参照．［訳注］

たは $A \cup B$[1] で表わし，それらの結びという．束は最小元，すなわち空集合と，最大元，すなわち全空間をもっている．

このときルジールはつぎの公理から出発する．

I.　射影空間の線型多様体は，最小元 0 と最大元 1 をもつ束の元である．$A \leqslant B$ で表わされた順序関係は，A は B の中にあるまたは B は A を通ると読む．0 を覆っている元[2]を点という．

II.　点 P が多様体 B の中にないならば，$B \cup \mathrm{P}$ は B を覆う．

III.　任意の多様体 $A \neq 0$ の中に位置している点の集合は，空ではなくかつ A はそれらのうちの有限個の結びである．

このとき独立の概念はつぎのように表わされる．$n+1$ 個の点のうち少なくとも一つが他の n 個の結びの中に含まれるならば，それら $n+1$ 個の点は従属である．そうでない場合それらは独立である．

したがって一つの多様体がそれらの結びになっているような独立な点の数は，その多様体だけに関係し，可能な多くの選び方があったとしても，選ばれた独立な点には無関係である．この多様体の次元は独立な点の数から 1 を引いた数である．

空間（束の最大元）の次元が n であるとき，次元 $n-1$ の多様体を超平面という．

そこで第四の公理はつぎのものである．

IV.　A が超平面 H の中に含まれていないならば，A は $A \cap H$ を覆う．

これはIIに双対な公理である（この表現は束の順序を逆にするとIIになる）．

これら四つの注目すべき結果は，多様体の次元が満足する等式

$$d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B)$$

である．

これらの非常に単純な概念から，新しい公理によって理論を発展的に富ませながら，古

---

[1] 交わりはもともと束の概念であるが，多様体をそれに含まれる点の集合としてみると，集合の理論のそれと一致する．結びはこれに反して束の理論の演算であって，集合の理論での合併とここでは異なる．

[2] 一つの元 a が他の元 b を覆うとは，a が完全に b より大きく，そして a と b との間にいかなる他の元も存在しないことである．

典的な射影幾何学さらにはアフィン幾何学も再構成できる．

何が射影空間のエッセンスをなしているかを力説するためと，それから作られる理論のエレガンスのゆえに注意をしたこの観点はこれまでにする．

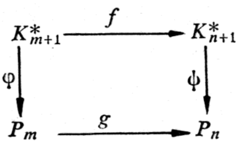
3. 射　影　写　像[1]

同じ体 K 上の次元がそれぞれ m と n である二つの射影空間を考える．それらを P_m, P_n と表わす．それらは原点を除いた線型空間 K^*_{m+1} と K^*_{n+1} から定義される．φ と ψ をそれぞれ K^*_{m+1} から P_m 上，K^*_{n+1} から P_n 上への標準的写像とする．K^{m+1} から K^{n+1}（$m \leqslant n$）への任意の一対一線型写像 f に対して，《商を作ることによって》P_m から P_n への射影写像 g を等式

$$g \circ \varphi = \psi \circ f$$

によって対応できる．

これらの写像はつぎのシェーマに従うものである．



P_m の点 $\boldsymbol{x}$ は K^*_{m+1} の一つの《直線》の φ による像であり，f によるその直線の像は K^*_{n+1} の一つの直線で，それの ψ による像としての P_n の点は定義によって g による $\boldsymbol{x}$ の像である．P_m の p 次元射影的多様体は K^*_{m+1} の p 次元部分線型空間（0 を除いた）の φ による像であるから，射影的多様体の射影写像による像は同じ次元の射影的多様体であるという結果が得られる．

一般化．　半線型写像．前のことがらを同型ではあるが異なる体 K と K' の上で定義された射影空間の場合に一般化できる．σ を K と K' の間の同型写像，λ^σ を $\lambda \in K$ の K' における像とする．このとき，K 上の右線型空間を E，K' 上の右線型空間を E' とすると E の任意の $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ と K の任意の λ に対して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(\boldsymbol{x}\lambda) = f(\boldsymbol{x})\lambda^\sigma$$

---

[1] ここで単に射影写像といっているのは，しばしば射影的線型写像とも呼ばれるものである．ここではこれだけしか扱わないから混乱はおこらないであろう．

が成立するとき，f を同型写像 σ に伴う E から E' への半線型写像であるという．

前と同じように商を作ることによって f から導かれる写像は，f が一対一ならば，対応する射影空間に対しての射影写像といわれる．

ここで最も一般的な形で射影幾何学の基本定理を述べ，それを証明することにしよう．

定理．　E と E' をそれぞれ二つの体 K と K' 上の同次元 n の右線型空間，P と P' をそれぞれに対応する射影空間とする．P から P' の上への一対一写像 g で，p の同一直線上にある任意の三点の像が P' の同一直線上の三点であるようなものが存在するならば，$n \geqslant 3$ のときは，つぎのことが成立する．

1）K と K' は同型である（その同型写像を σ とする）．

2）g は E から E' の上への一対一半線型写像 f から商を作ることによって導かれる σ に伴う射影写像である．

ここで述べていることは，前に説明した観点，すなわち射影空間の理論の本質は点の独立性の概念の中に含まれているのであるということに対しての決定的な保証を与えるものであることを注意しよう．

証明[1]．　E の点 $\boldsymbol{x}$ の標準的写像による P の点を $\boldsymbol{x}K$ で表わす（E', P', K' についても同じ約束をする）．

1°　p 次元多様体 V の像 $g(V)$ はまた p 次元多様体である．$\boldsymbol{a}_iK$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$ を V を生成している射影的に独立な点とする．同一直線上の点の像はまた同一直線上にあるから，$g(V)$ は $g(\boldsymbol{a}_iK)$ によって生成された多様体 V' の中に含まれる．しかし他方 $g(P)=P'$ より，独立な点の像はまた独立な点であるという結果になる．実際，$g(\boldsymbol{a}_iK)$ が独立でないと仮定しよう．$\boldsymbol{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$ を E の基底の中に入れて，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を E の基底とすると，像 $g(\boldsymbol{a}_iK)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ は次元 $< n-1$ の多様体を張り，$g(P)=P'$ であるから，それは P' を含むことになる，他方，$d(P')=n-1$ であることからこれは不合理である．しかもこのとき $g(V)=V'$ である．もしそうでなければ，V' は $g(\boldsymbol{a}K)$ の形の元を含むでろう，ここで $\boldsymbol{a}K$ は $\boldsymbol{a}_iK$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$ に射影的に独立である．すると V と $\boldsymbol{a}K$ によって生成された多様体 V_1 は，その像が p 次元の V' の中に含ま

---

[1] この証明は J. DIEUDONNÉ の著作に従うことにする．*La Géométrie des Groupes Classiques,* Berlin. 1955.

れているのに，$p+1$ 次元となるからである．

2° <u>K と K' は同型である．</u>(e_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を E の基底，e_1K, e_2K と e_nK を P の点，e'_1K', e'_2K' と e'_nK' をそれらの g の像とする．1° より e'_1, e'_2 と e'_n は E' において線型独立であるという結果になる．D を e_1K と e_2K によって生成された射影的直線，D' をその像とし，F を D と e_nK によって生成された射影的平面，F' をその像とする．D 上にない F のすべての点はただ一通りに $(e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+e_n)K$ と表わされる．したがって Fにおける D の補集合は e_1 と e_2 によって生成された K 上の右線型空間 L と同一視できる（Dは無限遠直線とみなされる！）[1]．Dと異なる F のすべての射影的直線は Lの一つの直線に対応するし，D上で交わる F の二直線は平行移動によって互いに導かれる二直線に対応する（それらを平行であるという，また《倍写像》によっても互いに移せることを注意しよう）．したがって F' における D' の補集合と e'_1 と e'_2 によって生成された線型空間 L' との間に類似の同一視をすることができる．ゆえに写像 g はすべての直線を直線に移し，平行二直線を平行二直線に移し，かつ $u(0)=0$, $u(e_1)=e'_1$, $u(e_2)=e'_2$ を満たす L から L' の上への一対一写像 u に対応する．このとき L における平行な直線の作り方によって，K の二つの元 α と β から，元 $\alpha+\beta$ と $\alpha\cdot\beta$ を e_1 によって生成された直線上の点の横座標として得ることは容易である（図1と図2）．u によって平行性は保存されるから，$u(e_1\xi)=e'_1\xi^\sigma$ とおくと，写像 $\xi \longrightarrow \xi^\sigma$ は K から K' の上への一対一写像であり，和と積を保存することがすぐわかる．これが求める同型写像である．

3° <u>g は射影写像である．</u>L において $e_1\xi$ と $e_2\xi$ を結んで得られる直線は e_1 と e_2 を結んで得られる直線に平行である．したがって $u(e_2\xi)=e'_2\xi^\sigma$ が成立する．他方，L の点 $e_1\alpha+e_2\beta$ はそれぞれ e_1 と e_2 に平行な $e_1\alpha$ と $e_2\beta$ をひくことによって得られる．したがってまた

$$u(e_1\xi+e_2\eta)=e'_1\xi^\sigma+e'_2\eta^\sigma$$

が成立する．すなわち，u は σ に伴う L から L' の上への一対一半線型写像である．

この推論は P のすべての点の対 e_iK, e_jK に対しても成立する．σ に伴う一対一半線型写像を v で表わし，$v(e_i)=e'_i$ であるとし，P から P' の上への対応する射影写像を h とすれば，$h^{-1}\circ g$ は P からそれ自身の上への写像でありかつすべての直線を直線に写し，二点 e_iK と e_jK を結ぶ直線上のすべての点を不変に保つものであることがわかる．これは

[1] 同次座標を $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とすると，F 上の点は $(\alpha_1, \alpha_2, 1)$ であり，したがって (α_1, α_2) は平行座標である．また D 上の点は $\alpha_3=0$ に相当する．［訳注］

恒等変換である．したがって $g=h$ が成立する．

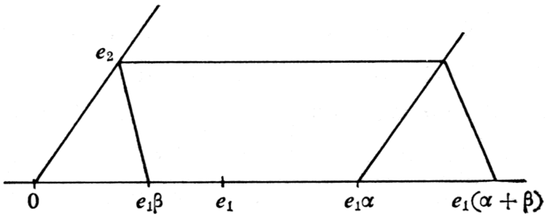


図 1

注意. この定理は $n=2$ のときは成立しない．$K=K'=R$ の場合，射影変換は複比を不変にすることによって特徴づけられる．

4. 射影空間の位相

線型空間Eに位相が入れられているならば，対応する射影空間に対しては商空間を作ることによる位相が入れられる．実または複素射影空間がこの場合である（すなわち実または複素数体上に定義されたものである）．

ここではつぎの重要な結果を引用するだけにする．$P_n(R)$ は直径対点を同一視することにより球面 S_n と位相同型である．$P_n(R)$ は境界の S_{n-1} の直径対点を同一視することによって閉球 B_n と位相同型である．$P_n(R)$ はコンパクトで連結である．

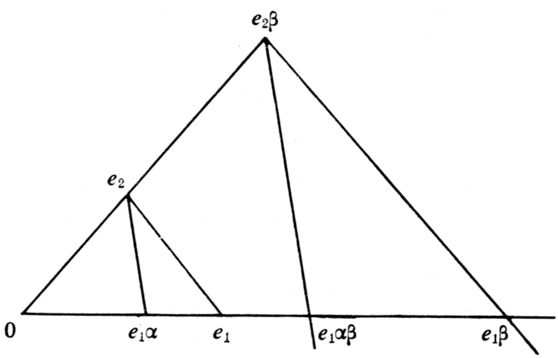


図 2

位 相 構 造

数　直　線
基本的な位相的性質

ソルボンヌ大学教授

G. ショケ

1. 序　　論

位相空間論は解析的表現を与えられるもの以外の関数に関心をもったとき，また，連続関数の正確な定義を与える必要を感じたときに発生した．現在でもなお，位相空間論は収束と連続の概念を研究するものであるといえる．

これらの概念を定義した最初の集合は，実数の集合 $\boldsymbol{R}$ で，これは今日でも理論的ならびに応用的研究において非常に重要なものである．

この講義では $\boldsymbol{R}$ の定義とその位相について述べよう．

2. 連続な全順序可換群として定義された集合 R

$\boldsymbol{R}$の位相について述べる前に，まず，基本的ないくつかの性質を思い起こそう．より正確には，$\boldsymbol{R}$を特徴的な性質により，代数構造と順序構造をもった集合として定義しよう．

定義 1.　つぎの条件を満たすとき集合 G は**全順序可換群**であるという．

1)　Gには $+$ で表わされた内算法が与えられており，それに対してGは可換群である．

2)　Gには $\leqslant$ で表わされた全順序構造が与えられている．

3)　この加法と順序はつぎの意味で両立する．

$$a \leqslant b \text{ ならば，すべての } x \text{ に対して } a + x \leqslant b + x \text{ である．}$$

したがって，関係 $a \leqslant b$ は $0 \leqslant (b-a)$ に同値であることが容易にわかる．

例.　すべての整数の集合 $\boldsymbol{Z}$．有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$．実係数の多項式 $p(x)$ の集合 $\boldsymbol{P}$，こ

こでは $(p_2 - p_1)$ の最低次の項の係数が正であるとき，$p_1 < p_2$ とする．

定義 2.　つぎの条件を満たすとき全順序集合 E は連続であるという．

1)　E の任意の開区間 $]a, b[$ は少なくとも一点を含む（したがってまた無限個の点を含む）．

2)　上に有界[1] な E の任意の部分集合 X は上限[1] をもつ．

整数の集合 Z は性質 2) を満足するが，性質 1) は満足しない．有理数の集合 Q については その逆である．

R が定義されたとき，R のすべての部分区間は連続であることが証明できる．同様に，E を $a \in [0,1]$，$b \in [0,1]$ である対 (a,b) の集合とし，関係

$$a < a' \text{ または } a = a' \text{ でかつ } b \leqslant b' \quad \text{ならば} \quad (a,b) \leqslant (a',b')$$

によって順序づけると，順序集合 E は連続である．

E が連続ならば，E の下に有界な任意の部分集合 X が，下限をもつことは明らかであり，それは X の下界の集合の上限にほかならない．

定義 1 と 2 は，同型の意味で，ただ一通りに構造のつけられた集合に対して適用できることを示そう．より正確には，

定理 1.　G と G' は二つの連続な全順序可換群で，一つ以上の元を含むものとする．$a > 0$，$a' \geqslant 0$ である任意の $a \in G$，$a' \in G'$ に対して，$f(a) = a'$ であるような G から G' への増加表現[2] f がただ一つ存在する．$a' \neq 0$ のときは，f は同型写像であり，$a' = 0$ のときは，すべての x に対して $f(x) = 0$ である．

$a' \leqslant 0$ のときは，《増加》を《減少》という言葉でおきかえて類似なことが成立する．

この定理の証明は，指数関数の存在を示す古典的で初等的な証明をまねして得られる．

まず，G（または G'）の任意の区間は中点をもつことを示し，それによって，G の元 $\left(\frac{p}{2^r}\right)a$ の集合 A が定義できる．集合 A は G 上で密[3] であり，関係 $f\left(\frac{p}{2^r}a\right) = \frac{p}{2^r}f(a)$

---

[1] すべての $x \in X$ に対して，$x \leqslant a$ である E の元 a を X の**上界**という．X のすべての上界の集合のうちで最小のものが存在するとき，それを X の**上限**という．**下限**と**下界**の概念も同様に定義する．

[2] これは $f(x+y) = f(x) + f(y)$ かつ，$(x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y))$ を意味する．

[3] G の空でない任意の開集合は A の点を含むということである．

によって A 上で f を定義する．つぎに，f を G 全体に延長する．

注意． f と g を G から G' への二つの単調な表現，h を $h(x)=f(x)+g(x)$ によって定義された写像とする．h がまた表現であることは容易にわかる．他方，たとえば，もしも $h(a)\geqslant 0$ $(a>0)$ ならば，A のすべての元 $x\geqslant 0$ に対しても $h(x)\geqslant 0$ が成立する．これはまたすべての $x\geqslant 0$ に拡張される．

したがって，G から G' への二つの単調な表現の和はまた単調であるということができる．より精密には，これらの表現は群をなし，かつ G' に同型である．

これらの群の存在

定理1は，同型という意味で，対象としている群がただ一つであることを示しているものであるから基本的である．しかしそれからは存在は示されない．存在はいろいろな方法で証明できる．

たとえば，G は通常の加法のきめられた無限小数展開の集合になるであろう．この場合の欠点はある位から先が9しか含まないものは除く必要があるということである．二進展開についても類似な注意が必要である．

より古典的には，有理数または二進法で表わされた有理数の順序可換群 Q から，コーシー列の方法や切断の方法を用いてそれを完成することができる．

ここでは切断の方法を都合よく変形したものを示そう．これによると三種類の切断が存在しなければならないという不便がなくなる．

つぎのような Q の空でないすべての部分集合 s を順序群 Q の**下組**という．

1) $x<y$ で，かつ $y\in s$ ならば，また $x\in s$ である．

2) s は最大元をもたず，かつ $s\neq Q$ である．

たとえば，すべての $a\in Q$ に対して，$x<a$ である x の集合 s_a は一つの下組である．

下組の集合を S とする．包含関係によって S の中に全順序が定義でき，かつ連続である．それは下組の任意の合併はまた一つの下組であるか，または Q に等しいという事実を用いて証明できる．

S 上に加法をつぎのように定義する．

$$s_1+s_2=(x_1+x_2)\text{ の集合,}\qquad \text{ここで } x_1\in s_1,\ x_2\in s_2 \text{ である．}$$

したがって，この加法と順序をもった S は連続な全順序可換群であり，またそれは同型写像 $a\longrightarrow s_a$ $(a\in Q)$ によって Q に同型で密な部分群を含む．一般にこの部分群を Q

と同一視する．

実数直線 R の名称を与えるのは，特にこの集合に対してである．

3. R 上の体構造

今定義した実数直線 R 上で，これまでは加法というただ一つの演算しか用いなかったが，さらに乗法を定義できる．そのためには，いたるところ密な部分集合 Q 上にすでに定義されている乗法を R に拡張すれば十分であろう．この方法は古典的なものである．

しかし，われわれは定理1に基づいた別の方法を利用しよう．それは乗法の特徴的な性質がはっきりと示され，かつまた乗法を演算として考える初等的な方法に非常に類似しているという興味があるものである．

定義 3.　集合 K が**全順序可換体**であるとは，それが可換体の構造をもち，かつ K の代数構造とつぎの意味で両立する全順序（$\leqslant$ で表わす）をもつときである．

1)　$a \leqslant b$ ならば，任意の x に対して $a+x \leqslant b+x$ である．

2)　$0 \leqslant a$ かつ $0 \leqslant b$ ならば，$0 \leqslant ab$ である．

$x \geqslant 0$（または $x>0$）である元 x の集合を K_+（または K_+^*）で表わす．

定理 2（存在と一意性）．

G を連続な全順序可換群とする（加法で表わす）．

G の任意の元 $e>0$ に対して，G 上に体構造が存在し，それはその加法が G の加法と一致し，その単位元は e であり，かつつぎの関係が成立するようなただ一つのものである．

（1）　　$0 \leqslant a$ かつ $0 \leqslant b$ ならば，$0 \leqslant ab$ である．

この体は可換である．

$e>0$ と仮定したのは，全順序体では任意の平方 x^2 が $\geqslant 0$ であり，e が単位元のときは $e=e^2>0$ だからである．

<u>一意性</u>．G が条件（1）を満たす体構造をもつと仮定し，x と y の積を xy で表わす．

a を G の元 >0 とする．$x \to ax$ によって定義された写像 f は群 G から自分自身の上への同型写像であり，条件（1）により f は増加である．しかるに，$f(e)=a$ であるから，定理1によってこの写像 f は与えられた a，e と G の群構造によって完全に決定される．

同様に，$a<0$ ならば，任意の体の中で $ax=-(-a)x$ が成立するから，積 ax は与えられた a，e，G（と x）によって決定される．

すなわち，G 上に条件（1）を満たす体構造が存在するならば，それは単位元を選ぶことによって完全に決定される．

存在．G 上に確かにこのような体構造が存在し，かつその体は可換であることを証明しなければならない．

上に述べたことがらは，積 ax を，e を a に変換する増加または減少表現 f_a で x を変換したものとして定義してもよいことを示している．

より正確には，$ax=f_a(x)$ と書く．

この乗法をもった G が順序可換体になることを証明しよう．

1）$f_a \circ f_b$ は単調な表現である．

$f_a(f_b(e))=f_a(b)=ab$ であるから，$f_a \circ f_b=f_{ab}$ である．

よって，$f_a(f_b(c))=f_{ab}(c)$ となり，これより $a(bc)=(ab)c$．すなわち，積は結合律を満たす．

2）f_e は恒等写像であるから，任意の b に対して $eb=b$ が成立する．他方，$be=b$ であるから，e は単位元である．

3）任意の $a \neq 0$ に対して，f_a は G から G の上への同型写像である．したがって，$f_a(a')=e$ であるような元 a' が存在し，$aa'=e$ が成立する．これより $a'a=e$ が得られる．なぜならば，$a'a=u$ とおけば，$aa'a=au$ すなわち $a=au$ が成立し，f_a が一対一であるからこれより $u=e$ である．

すなわち，a は逆元をもつ．

4）式 $f_a(x+y)=f_a(x)+f_a(y)$ は

$$a(x+y)=ax+ay$$

と書かれる．また，$(a+a')x=ax+a'x$ が成立することがわかる．

実際，写像 $x \longrightarrow (a+a')x$ は $f_{a+a'}$ であり，また写像 $x \longrightarrow ax+a'x$ は二つの単調な表現 f_a と $f_{a'}$ の和である．前の注意により，これはまた一つの単調な表現であり，それを g で表わす．写像 $f_{a+a'}$ と g は点 e で同じ値をとり，それらは同じものとなるからである．

したがって，加法に関して乗法が分配的であることが証明された．

これまでに証明した乗法の性質によって，乗法が G の上に体構造を決定することがわ

かった．この体が可換であることを示そう．

5）それには写像 $x \to ax$ と $x \to xa$ が同じものであることを示せば十分である．たとえば $a>0$ と仮定しよう．

第1の写像を f_a，第2のものを φ_a としよう．$(x+y)a=xa+ya$ は証明したばかりであり，他方，任意の $x \geqslant 0$ に対して $xa \geqslant 0$ であるから，φ_a は単調な表現である．$\varphi_a(e)=f_a(e)$ であるから，$\varphi_a=f_a$ が成立する．

6）最後に，$0 \leqslant a$ かつ $0 \leqslant x$ から $0 \leqslant ax$ が得られることに注意するならば，この定理は完全に証明されたことがわかる．

系．　K と K' を二つの連続な全順序可換体とする．体 K から体 K' の上への単調な同型写像が存在し，かつそれはただ一つである．

この同型写像は，K の単位元を K' の単位元に移す順序加群 K から順序加群 K' の上への同型写像にほかならない．

体 R.　この系により，連続な全順序可換体ならばどんなものでも実数体と呼ぶことができる．しかし，われわれは加群 R に $e=1$ を単位元とする乗法を与えることによって得られる体に対して，実数体という名称を用いることにしている．

指数関数と対数関数．　集合 R_+^* は乗法に対して連続な全順序群である．よって，それは定理1により加群 R に同型である．

$f(1)=a$ であるような R から R_+^* の上への単調な同型写像 f は a を底とする指数関数である．逆写像 f^{-1} が a を底とする対数関数である．この写像は $a>1$ のとき増加であり，$a<1$ のとき減少である．

R と R_+^* のあいだの同型写像から，たとえば，R_+^* のすべての元は平方数であるというような結果が得られる．これによって前の系を精密にすることができる．実際，f を K から K' への代数的[1]な表現とすると，すべての $x \geqslant 0$ に対して $x=y^2$ が成立するから，$f(x)=f(y^2)=(f(y))^2 \geqslant 0$ である．したがって，f は増加表現である．すなわち，すべての x に対して $f(x)=0$ なる場合を除いて，これは増加同型写像である．

特に，体 R からそれ自身への任意の代数的表現 f に対しては，すべての x に対して $f(x)=x$ が成立するか，またはすべての x に対して $f(x)=0$ が成立するかのいずれかである．

---

[1] 先験的に f は増加であるということを仮定しないということである．

4. 開集合．閉集合．点の近傍

Rの代数構造とその順序構造とのあいだの関係をいろいろと発展させてきたので，これらの関係の知識が R の位相を定義し研究するためには不可欠なものではないかと思われるかもしれない．それは正しくはなく，Rの位相は順序の関係だけから定義できることがわかるであろう．これと類似な方法ですべての全順序集合の上に位相を定義できるのではないかと予想される．それが確かに正しいということは容易に証明できるだろう．

Rにおいて，$]a,b[$（ここで $a<b$），$]-\infty,a[$，$]a,+\infty[$，R，または $\varnothing$ という形のすべての集合を開区間と呼ぶことを思い起こそう．これらの定義はよく知られており，R上の順序の存在を用いるだけである．

二つの開区間の共通部分がまた開区間であることは明らかである．

定義 4.　Rの部分集合 A が開集合であるとは，それが開区間の（有限個または無限個の）族の合併であるときである．

これは任意の $x\in A$ に対して，xを含みかつ A の中に含まれている開区間が存在するならば A は開集合であるということと同じことである．

つぎの性質はただちに得られる．

O_1：　開集合の任意の（有限個または無限個の）合併は開集合である．

O_2：　開集合の任意の有限個の共通部分は開集合である．

O_3：　R および $\varnothing$ は開集合である．

性質O_1とO_3は容易にわかり，O_2は有限個の開区間の共通部分がすべて一つの開区間であることから得られる．

すべての開区間は開集合であることがまた定義から得られる．

注意.　無限個の開集合の共通部分は必ずしも開集合ではない．たとえば，開区間 $\left]-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right[$（ここで $n=1,2,3,\cdots$）の共通部分は一点0だけの集合で，これは開ではない．

定義 5.　Rの部分集合Aはその補集合が開であるとき閉集合であるという．

双対性の公式

$$\complement\left(\bigcup_i A_i\right)=\bigcap_i\left(\complement A_i\right),\qquad \complement\left(\bigcap_i A_i\right)=\bigcup_i\left(\complement A_i\right)$$

（$\complement A$ は A の補集合を表わす）を用いて，性質 O_1, O_2, O_3 のそれぞれから，閉集合に対する双対な性質がただちに得られる．

F_1：　閉集合の任意の共通部分は閉集合である．

F_2：　閉集合の任意の有限個の合併は閉集合である．

F_3：　$\varnothing$ および R は閉集合である．

閉集合の例．　1）任意の閉区間 $[a, b]$．実際，その補集合は開区間 $]-\infty, a[$ と $]b, +\infty[$ の合併である．

2）閉区間の任意の有限個の合併（したがって，任意の有限集合はこの特別の場合である）．

3）閉集合の有名な例はカントルの三進集合である．集合 A_n をつぎのようにしてつぎつぎと定義する．$A_1 = [0, 1]$，$A_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$，$A_{n+1}$ は A_n を構成しているそれぞれの閉区間から，中央の3分の1の開集合を取り除いて得られる．各 A_n は閉であり，求める集合 A はこれら A_n の共通部分である．

A は，三進法での数の系の中で0と2の数字だけからなる小数展開で表わされた $[0, 1]$ の元の集合である．

あとで，集積点の概念を使っての閉集合の興味ある特徴づけを述べよう．

定義 6（近傍）．　x を含む一つの開集合を含んでいる R のすべての部分集合 V を R の点 x の近傍と呼ぶ．

すなわち，V が x を含む開区間を含んでいるならば，V は x の近傍である．

たとえば，任意の開集合 A はその各点の近傍である．逆に，その各点の近傍である任意の集合 A は開区間の合併である．したがって開集合である．だから開集合の概念と近傍の概念は互いに同値である．

R の点の近傍の簡単な性質を述べよう．

V_1：　x の任意の近傍は x を含む．

V_2：　x の一つの近傍を含むすべての集合はまた別の近傍である．

V_3：　x の二つの近傍の共通部分はまた別の近傍である．

V_4：　x の任意の近傍 V は，W の任意の点の近傍が V であるような x の別の近傍 W を含む．

V_5：　R の異なる二点 a，a' は交わらない二つの近傍 V と V' をもつ．

性質 V_1, V_2, V_3 は明らかである．V_4 を証明するためには，W として V の中に含まれかつ x を含んでいる一つの開集合をとれば十分である．

V_5 を証明するためには，$a < a'$ で b が a と a' の間にあると仮定し，$V =]-\infty, b[$, $V' =]b, +\infty[$ とすれば十分である．V_5 の性質は直線上の点列がせいぜい一つの点に収束できることの証明に用いるものである．

集合の接触点と集合の集積点

A を R の部分集合とし，$x \in R$ とする．

x の任意の近傍が少なくとも A の一点を含むとき，x は A の**接触点**であるという．

x の任意の近傍が x 以外に少なくとも A の一点を含むとき，x は A の**集積点**であるという．

すなわち，x が A の接触点であるというのは，$x \in A$ または x が A の集積点であるということと同値である．

x が A の集積点であるならば，x のすべての近傍は A の無限個の点を含むことが容易に示される．

集積点でない A の点は A の**孤立点**と呼ばれる．

例．　1)　整数の集合 Z は集積点をもたない．

2)　点 $\dfrac{1}{n}$ $(n \in Z^*)$ の集合 A はただ一つの集積点ゼロをもつ．A のすべての点は孤立点である．

3)　有理数の集合 Q は孤立点を一つももたない．R のすべての点が Q の集積点である．

接触集合，閉包

A の接触点の集合を A の接触集合と呼ぶ．

A を含むすべての閉集合の共通部分を A の閉包と呼ぶ．したがって，これは A を含む最小の閉集合である．

この二つの集合は同じものであることが容易に証明される．それを $\overline{A}$ で表わし，この二つの用語を区別しないで用いる．

たとえば，A が閉集合であることは $A = \overline{A}$ と同値である．

上に有界な閉集合の上限

R の定義から，上に有界な R の任意の部分集合 A は上限 a をもつことがわかる．それ

を $\sup A$ と表わす．

$]a, +\infty[$ は A の点を全然含まないし，a の任意の近傍は A の点を少なくとも一つは含んでいるという事実によって a を特徴づけることができる．特に，a は A の接触点であり，したがって，$a \in A$ であるか a が A の集積点であるかのいずれかである．

A が閉集合であるとき，すなわち $A = \overline{A}$ であるときは，$a \in A$ である．よって上に有界なすべての閉集合はその上限を含む．

5. 有界閉区間の完備性

有界閉区間のもっとも重要な性質の一つにボレル=ルベーグの定理がある．それは開被覆の研究を有限個の部分開被覆の研究に帰着させるものであり，また大域的な性質を局所的な性質から導くことを可能にするものである．

定理 3（ボレル=ルベーグ）．　$(\omega_i)_{i\in I}$ を R の開集合の族とし，その合併は有界閉区間 $[a, b]$ を含んでいるとする．このとき同じ性質をもつ有限部分族 $(\omega_i)_{i\in J}$ が存在する．

これを証明するために，区間 $[a, x]$ が ω_i の有限部分族で被覆されるような $[a, b]$ の点 x の集合を A と表わす．すると A はその上限を含み，そしてこの上限が b にほかならないことが容易に証明される．しかるに，$b \in A$ という関係は定理の述べていることと同値である．

定理 4（ボルツァノ=ヴァイエルシュトラス）．　有界閉区間 $[a, b]$ のすべての無限部分集合 X は $[a, b]$ 上に少なくとも一つの集積点をもつ．

これは前の定理から直接導かれる．

もしも $[a, b]$ の各点 x が X の集積点でないならば，任意の x は X の高々一点，すなわち x 自身を含む開近傍 $V(x)$ をもつ．これらの $V(x)$ は $[a, b]$ の開被覆をなす．したがって定理 3 により，$V(x)$ のうちで $[a, b]$ を被覆する有限族が存在する．それを $(V(x_p))$ $(p = 1, 2, \cdots, n)$ としよう．ゆえに，X は高々 n 個の点 x_p しか含まないことになるからである．

この二つの定理から，$[a, b]$ を $[a, b]$ の任意の閉部分集合でおきかえて得られる類似な定理を容易に得ることができる．

6. 連続関数．数列の極限

おおまかにいって，ある関数 f が点 x_0 で連続であるとは，x が x_0 の十分近くにあるときは，$f(x)$ も $f(x_0)$ の近くにあるということである．したがって，近傍の概念によって連続性がうまく定義できると期待される．

ここでは R の部分集合 X 上で定義され，かつ R の中に値をとる関数，すなわち X 上の実数値関数だけを考える．

定義 7.　f を R の部分集合 X から R への写像，$x_0 \in X$ とする．

f が x_0 で連続であるとは，$f(x_0)$ の任意の近傍 W に対して，

$$((x \in V \cap X)) \Rightarrow (f(x) \in W)$$

を満たす x_0 の近傍 V が存在するときである．

V が R の中の x_0 の近傍であるとき，$(V \cap X)$ の形の X のすべての部分集合を X に相対的な x_0 の近傍と呼ぶことにきめれば，上の条件は任意の W に対して，集合 $f^{-1}(W)$ が X に相対的な x_0 の近傍であるということと同値である．

記述を簡明にするために，いまは $X = R$ と仮定しよう．すなわち f を R から R への写像とする．

f がすべての点で連続ならば，R の任意の開集合 ω に対して，集合 $f^{-1}(\omega)$ はすぐ前で示したことによりその集合の各点の近傍である．したがってそれは開集合である．逆に，f が任意の ω に対してこの性質をもつ写像ならば，f はすべての点で連続であることが証明される．これで連続関数がうまく特徴づけられる．

これによって，たとえば f と g が R から R への連続写像であるとき，それらの結合 $f \circ g = f(g)$ がまた連続である（連続の推移性）ことがただちに証明できる．

同値な特徴づけを記す．

R の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が閉集合であるとき，R から R への写像 f は連続である．

証明は，公式

$$f^{-1}(\complement A) = \complement (f^{-1}(A))$$

よりただちに得られる．

数 列 の 極 限

定義 8. Rの点からなる数列 (x_n) が R の点 l に収束する，または極限値が点 l であるというのは，l の任意の近傍 V に対して，有限個の n の値を除いて $x_n \in V$ が成立することである．

$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ とおけば，この条件は少なくとも一つの n に対して，$X_n \subset V$ が成立するということになる．

性質 V_5 より，一つの数列はせいぜい一つの極限値をもつことが容易に示される．

つぎのことがらも容易に証明されるだろう．

1) すべての上に有界な増加（または下に有界な減少）数列は極限値をもつ．

2) f が X から R への写像で，かつ X の点 a で連続であるとき，a に収束する X の点からなる任意の数列 (x_n) に対して，数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束する．

数 列 の 接 触 値

実数 $a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ の数列は収束しない．しかしながら数 $\frac{1}{e}$ と $-\frac{1}{e}$ は広い意味で極限値のように思われる．この概念を分析して，つぎの定義が導かれる．

定義 9. (a_n) $(n = 1, 2, \cdots)$ を R の点からなる数列とする．a の任意の近傍 V に対して，$a_n \in V$ であるような任意の大きな添数 n が存在するとき，R の点 a はこの数列の接触値であるという．

集合 $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ を A_n と表わせば，すべての n に対して，点 a が A_n の接触集合に属するとき，a はこの数列の接触値であるといえる．

したがって，数列の接触値の集合は $A = \bigcap_1^\infty \overline{A}_n$ である．

これは閉集合である．たとえば，$a_n = n$ のときのように空集合であることもありうる．しかし，有界閉区間のコンパクト性を使って，すべての有界な数列は少なくとも一つの接触値をもつことが容易に証明される．

数列 (a_n) が l に収束するときは，l がただ一つの接触値である．しかし，この逆は真ではない．たとえば数列

$$\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \cdots, \frac{1}{n}, n, \cdots\right)$$

はただ一つの接触値 0 をもっているが，しかしこの数列は 0 に収束しない．これに反し，

有界な数列がただ一つの接触値 a をもつならば，それは a に収束する．これは本質的には有界閉区間のコンパクト性によるものである．

R の可算基底．写像

これまでに調べたすべての位相的な性質は R の順序構造だけを用いたが，これらの性質は集合の中の上に有界な部分集合が上限をもつようなすべての全順序集合に対しても成立する．

Rが密な可算部分集合（すなわちQ）を含んでいるという事実を用いて，この可算の特質に関連した新しい性質が得られる．それらのいくつかを列記しよう．証明は容易である．

1）Rの開集合の可算族（ω_n）（開集合 ω_n としては，区間 $]a, b[$，$a, b \in Q$ をとる）で，Rの任意の開集合がそれらの開集合の部分族の合併であるようなものが存在する．このような族（ω_n）は R の可算基底と呼ばれる．

2）R の部分集合 X の任意の開被覆のうちから，有限または可算な部分開被覆をとりだすことができる．

特に，どの二つも交わらない開集合の任意の族は有限または可算であるから，R の任意の開集合 ω はどの二つも交わらない開区間の可算個の合併である．これらの区間は，ω 上に $[x, y] \subset \omega$ であるとき $x \sim y$ であると定義された同値関係による同値類である．

3）a が X の集積点ならば，a は X の異なる点からなる数列の極限値である．

4）a が数列（x_n）の接触値であるとき，a に収束するような与えられた数列の部分列が存在する．

5）f を R の部分集合 X から R への写像，$a \in X$ であるとする．f が点 a で連続であるためには，a に収束する Xの点からなる任意の数列（x_n）に対して，数列 $f(x_n)$ が $f(a)$ に収束することが必要十分である．

これは数列の極限値の研究で述べたことがらを補足している．

これらの五つの性質は第一のものから容易に導かれる．

7. R の一様構造

これまではRの代数構造を用いなかった．加群の構造によって新しい性質が定義できることがわかる．実際，R上の平行移動の存在によって集合の大きさを問題にすることがで

きる．任意の $X \subset R$ と $a \in R$ に対して，元 $(x+a)$，$x \in X$，の集合を $X+a$ で表わし，$X+a$ を平行移動 a によって X を平行移動したものと呼ぶ．

したがって，つぎの定義が与えられる．O の近傍 V と R の部分集合 X が与えられているとき，X を平行移動したものが V の中に含まれるならば，X は V よりも次数が小さいという．このような定義は適当な位相をもったすべての群に拡張できる便利なものであるが，しかし，R は全順序群であるという事実を用いて，この定義をより精密にできる．

任意の $x \in R$ に対して，$|x| = \sup\{x, -x\}$ とおくと，$|a+b| \leqslant |a| + |b|$ が証明される．つぎに $d(x, y) =$ x, y の距離 $= |x-y|$ とおく．つぎのことが容易に証明される．

1)　$x \neq y$ のとき $d(x, y) > 0$，そして $d(x, x) = 0$

2)　$d(x, y) = d(y, x)$

3)　$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$　　（三角不等式）

この三つの性質は本質的なものであり，直線の一様構造の研究でたえず必要である．

集 合 の 直 径

任意の $X \subset R$ に対して，X' を数 $|x-y|$，$x, y \in X$，の集合とする．X' が上に有界であるときは $\delta(X) = \sup X'$，上に有界でないときは $\delta(X) = +\infty$ とおく．$\delta(X)$ を X の直径と呼ぶ．$\delta(X) = \delta(\overline{X})$ がただちに得られる．

定義 10.　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(X) \leqslant \varepsilon$ であるとき集合 X は次数 ε の大きさであるという．

集合 X と Y が次数 ε の大きさで，かつ $X \cap Y \neq \emptyset$ のとき，集合 $X \cup Y$ は次数 2ε の大きさである．

コ ー シ ー 列

(a_n) を収束する数列とし，$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ とおくと，$\delta(A_n) \to 0$ なることがわかる．

$\delta(A_n) \to 0$ であるとき，数列 (a_n) はコーシー列であるという（これは $p, q \to \infty$ のとき，$|a_p - a_q| \to 0$ であるということになる）．

すべての収束する数列はコーシー列であることに注意しよう．逆は直線の基本的な性質である．すなわち，

定理 5.　Rのすべてのコーシー列は収束する．

これはこのような数列は有界であり，したがって少なくとも一つの接触点をもち，かつそれは高々一つの接触点をもつという事実からただちに導かれるものである．

より古典的には，それを単調列の場合に，帰着して証明できる．

一　様　連　続

これは純位相的概念，すなわち開集合または近傍の概念からは定義できない概念である．これはRの群構造，さらに距離の概念に基づいている．この事実を一様連続の二つの同値な定義を与えて明らかにしよう．

定義 11.　fをRの部分集合XからRへの写像とする．Oの任意の近傍Wに対して，Oの近傍Vが存在して，Vの次数の大きさである任意の$A \subset X$に対して，その像$f(A)$がWの次数の大きさであるとき，fは一様連続であるという．

定義 12.　上と同じ記号を使う．$\delta(A)$が0に収束するとき$\delta(f(A))$も0に収束するならばfは一様連続であるという．［すなわち，任意の$\varepsilon > 0$に対して，$(\delta(A) < \eta) \Rightarrow (\delta(f(A)) < \varepsilon)$であるような$\eta > 0$が存在することである．］

一様連続なすべての関数は連続であることはただちにわかる．この逆は真ではない．

しかしながら，基本的な定理によってXが有界閉集合のときは，XからRへのすべての連続写像は一様連続であることが示される．これは定理3，定理4，およびそれらを有界閉集合へ拡張したものから容易に得られる結果である．

関数列の一様収束

これは終空間に関する概念である．これは始空間には位相構造も一様構造も仮定しない．正確に表わすと，

定義 13.　Eをまったく任意の集合，(f_n)をEからRへの写像列とする．

任意の$\varepsilon > 0$を与えると，整数$n(\varepsilon)$が存在して，任意の$x \in E$と任意の$n \geqslant n(\varepsilon)$に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ または同値な } d[f_n(x), f(x)] < \varepsilon$$

が成立するとき，関数列$(f_n(x))$はEからRへの写像fに一様収束するという．

この概念についてはあとの講義でより詳細に調べるであろう．この収束は単純収束よりは制限が強いことは容易にわかるだろう．たとえば，f_n を

$$\left[0, \frac{1}{n}\right] \text{上で} \qquad f_n(x) = n^2x(1-nx)$$

$$\left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{上で} \qquad f_n(x) = 0$$

という条件によって，$[0, 1]$ 上で定義された実数値関数とする．

この列は関数 $f \equiv 0$（恒等的に 0）に単純収束をする．しかし $\max|f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{4}$ であるから，0 に収束するどころか $+\infty$ になり，この収束は一様収束でない．

8. R 上の位相的体構造

R の加法と乗法は，これから明確にする意味で R の位相およびその一様構造と両立する．

定理 6.　つぎの写像は連続である．

R から R への $x \to ax$，　R^2 から R への $(x, y) \to (x+y)$

R^* から R への $x \to \frac{1}{x}$，　R^2 から R への $(x, y) \to xy$

つぎの写像は一様連続である．

R から R への $x \to ax$，　R^2 から R への $(x, y) \to (x+y)$

R^2 から R への写像の連続と一様連続の意味を明確にする必要がある．たとえば，一様連続は R^2 の二点間の距離としてユークリッドの距離をとることによって得られる．

写像 $x \to \frac{1}{x}$ と $(x, y) \to xy$ は一様連続でないことを注意しておく．

この定理から，連続と一様連続の推移性を用いて，よく知られたいくつかの結果が得られる．

たとえば，f と g が連続（または一様連続）な実数値関数ならば，$(f+g)$ もそうである．

定理 6 を R の全順序群構造に関しての結果によって補足することができる．

<u>R から R への写像 $x \to |x|$ は一様連続である．</u>

公式 $\sup(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$ により，R^2 から R への写像 $(x, y) \to \sup(x, y)$ は一様連続である．

同様に，f と g が連続（または一様連続）な実数値関数ならば，$|f|$ および $\sup(f,g)$ もそうである．

群 R から R への連続表現

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

を満たす f を R から R への連続写像とする．これより，任意の分数 $\frac{p}{q}$ に対して $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)$ が明らかに成立する．

したがって，f の Q への制限は写像 $x \to ax$ にほかならない．

R から R への二つの写像 f と $x \to ax$ は連続であり，かついたるところ密な集合 Q 上で一致しているから，それらは同じものである（これには，証明は容易ではあるが重要な性質を用いる）．

したがって，R から R への（加法に関しての）任意の連続な表現は単調であり，かつ $x \to ax$ の形である．

R と乗法群 R^* との同型写像によって，$g(xy)=g(x)g(y)$ であるような R_+^* から R_+^* への写像 g に対して上と類似な結果がただちに得られる．

R の 部 分 群

簡単でしばしば使われる結果を述べてこの講義を終えよう．

定理 7.　R のすべての部分加群はいたるところ密であって，aZ（点 an の集合，ここで $n\in Z$）の形である．

R のすべての閉部分群は，R 自身であるかまたは群 aZ であることがこれから得られる．

さて一つの写像を考えよう．すなわち f を R 上の実数値関数とする．すべての x に対して，$f(x+a)=f(x)$ であるとき，a は f の**周期**であるという．

f の周期の集合 P は明らかに R の部分加群をなす．f が連続のとき，P は閉集合である．

したがって，$P=R$ であって，このとき $f=C$（定数）であるか，または P は aZ の形のいずれかである．いずれの場合も $a\geqslant 0$ であると仮定できる．この数 a を f の**最小周期**と呼ぶ．

ユークリッド空間と距離空間
距離の概念と位相の概念

ポァチエール大学理学部教授

A. ルヴュ

1. 実数直線についての復習

前の講義でショケ氏が数直線 R の代数構造について述べられ，R の順序構造に基づいて，R から R への連続写像を定義された．区間 $]a,b[$ は $a<x<b$ であるような実数 x の集合であり，R から R への写像 f が x_0 で連続であるとは，$f(x_0)$ が属するような任意の区間 $]\alpha,\beta[$ に対して，区間 $]a,b[$ が存在して，$x\in]a,b[$ なら $f(x)\in]\alpha,\beta[$ であるときである．あるいは，逆写像 f^{-1} を用いると（A が R の部分集合であるとき，$f^{-1}(A)$ は

$$x\in f^{-1}(A)\Longleftrightarrow f(x)\in A$$

によって定義された集合である），f が x_0 で連続であるとは，$f(x_0)$ を含む任意の区間 $]\alpha,\beta[$ に対して，$f^{-1}(]\alpha,\beta[)$ が x_0 が属するような一つの区間を含むときである．区間の任意の合併を開集合（より簡単には《開》）と呼べば，R から R への写像がすべての点で連続であるためには，任意の開集合の逆像がまた開（空集合は開集合とみなす）であるときにかぎることが導かれる．

われわれの第一の目的は数直線の別の構造を用いて，R から R への写像の連続性について定義することである．二つの実数点間の距離をそれらの差の絶対値で表わすと，f の点 x_0 での連続性についてつぎの三つの同値な定義を与えることができる．

1° 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$|x-x_0|<\eta$ ならば $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ であるような $\eta>0$ が存在する．

2° x から x_0 への距離を 0 にするとき，$f(x)$ から $f(x_0)$ への距離も 0 に収束する．

3°　中心が $f(x_0)$ の任意の区間 I に対して，$f^{-1}(I)$ は中心が x_0 の区間を含む.

この 3° で述べられていることと，一つの点を含む任意の区間はこの点を中心とする一つの区間を含むという事実から，連続性のこの定義と R の順序構造に基づく定義とのあいだの同値を導くことができ，そして R の開集合に対してつぎの定義を与えることができる．$x \in O$ ならば O に含まれる x を中心とする区間 I が存在するようなすべての集合 O は開である.

連続性についてのこの最後の定義は，距離が定義されている任意の空間に適用される利点がある.

2. 距離の定義

E を $x, y, \cdots$ で表わされた元からなる集合とする．E 上の距離は $E \times E$ から R_+（正の実数と零の集合）への一つの写像で，つぎの性質を満たすものである.

1°　$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

2°　$d(x, y) = d(y, x)$　　対称性

3°　$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$　　三角不等式

この距離の与えられた E は**距離空間**（または**距離のつけられた空間**）と呼ばれる．写像 $(x, y) \longrightarrow |x - y|$ は R 上の距離である.

E と F が二つの距離空間であるとき，連続性についての定義 2° はそのまま適用できる．1° に同値なものは，d を E 上の距離，δ を F 上の距離とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$d(x, x_0) < \eta \Longrightarrow \delta[f(x), f(x_0)] < \varepsilon$ であるような $\eta > 0$ が存在することである．3° に同値なものは球の概念を導入して得られる．中心が x_0 で半径 r（これは正である）の開球（または閉球）とは，$d(x_0, x) < r$（または $\leqslant r$）を満たす点 x の集合である．そこで，3° に同値なものは，中心 $f(x_0)$ の球の逆像は中心 x_0 の球を含むという形で表わされる.

距離によって定義された連続性を研究するまえに距離自身についての性質を少し調べよう．直線上や，平面 R^2，あるいは三次元空間 R^3 の中での《具体的な》距離が満足している距離の公理は《当然なもの》のように思われる．しかしながら，公理のそれぞれの意味を検討し，公理のうちの一つでも成立しないときは，その距離を用いることができないということを明らかにすることは悪いことではない.

第一の公理は，すべての点はそれ自身からの距離が零であり，すべての他の点からの距離は正であることを意味する．2°と3°は満足するが，1°として 1°′：　$x=y \Rightarrow d(x, y)=0$，すなわち一方から他方への距離が零であるような異なる元の対が存在するような《距離》の場合はどんなことが起こるであろうか（このような距離は**擬距離**と呼ばれる）．第一には，これは距離の選び方がまずかったからであり別のものをさがす必要がある．第二には，その距離が零であるような異なる元であるということは，いわば異なっているというのがまちがっている．なぜなら，それらの元は前に述べた問題で同じ働きをするからである．この場合，つぎのことを注意しよう．1°：　$d(x, y)=0$ で定義された関係 $x \rho y$ は同値関係を満たす．2°：　元 x から一つの同値類に属する二つの元 y, z への距離は等しい．なぜなら，$d(z, y)=0$ であるから

$$d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)=d(x, y)$$

かつ

$$d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(z, y)=d(x, z)$$

となるからである．したがって，mod. ρ の二つの類のあいだの距離として，その一つの類の元から他の類の元への距離をとることができる．商空間 E/ρ は距離空間である．これはお互いの距離が零であるものを同一視することによって E から導かれたものである．この簡単な例は，平面上の点の横座標の絶対値を擬距離とすることによって与えられる．同値類は直線 $x=C$（Cは定数）である．空間 E/ρ は実数直線に等長に写像（あとで説明する）される．

距離の対称性についての第二の公理は，具体的な距離では当然のことであるが証明はされない．登山での歩いた時間で測った距離は，下りよりも上りの方がずっと距離が大きい．非対称的な距離の場合はまったくドラマチックではない，なぜなら

$$\delta(x, y)=\sup [d(x, y), d(y, x)]$$

とおくと，δ が三つの公理を満足する距離になるからである（ただし d が1°と3°を満足するとする）．

第三の公理が保証する価値は，直観的な言葉で表わせば，《近くの近くは近い》ということである．

φ が正または零の値をとり，点 $(0,0)$ で連続な実数値関数であるとき，任意の不等式

$$d(x, y) \leqslant \varphi[d(x, z), d(z, y)]$$

によって，少なくとも同じ直観的な言葉《非常に近くの非常に近くは非常に近い》といってよいことが保証される．

古典的な形の三角不等式はつぎの二つの利点がある．

1°　その単純性．

2°　その適用の領域が非常に広いこと．

リセ[1] の第三学年で微積分学の単位認定のために学ぶすべての空間は，距離の構造のそなわったものであろう——実際には使っているがなぜ必要であるかについてはまったくふれていない！

距　離　の　例[2]

任意の集合上で $d(x, x) = 0$,　$x \neq y$ のとき $d(x, y) = 1$ とおくことによっても，一つの距離が定義できることを注意しよう（これは無限に弾力性のある物差をもった測量師を得られるかもしれないということである！）．これは明らかに極端な場合で，距離空間について予測された定理に対して思わざる反例を与えることで，ほとんど手すりの役割しかもっていない．

空間 R^n において，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対して，第一の距離（ユークリッドの距離）$d_1(x, y)$ を

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

とおいて定義できる．

公理 1° と 2° は明らかに成立する．三角不等式の成立を証明するために，$x_i - z_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$ とおくと，$x_i - y_i = a_i + b_i$ が得られる．したがって

$$\sqrt{\sum_i (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2}$$

を証明すればよい．この不等式は

$$\sum_i (a_i + b_i)^2 \leqslant \sum_i a_i^2 + \sum_i b_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)}$$

と同値である．これはまた

$$\sum_i a_i b_i \leqslant \sqrt{\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)}$$

---

1)　（中学校，高等学校の諸課程を含む官立または公立の）高等学校．［訳注］

2)　数学的例以外に，日常生活の距離のいくつかを引用することは少しは興味があるだろう．それらに対して距離という名称を与える習慣はないが，しかしそれらは一般に数学的な性質をもっている．電話の通話の単価，旅行の期間，その費用，….

と同値である．これは $\sum_i a_i b_i \leqslant 0$ のときは明らかに成立し，$\sum_i a_i b_i > 0$ のときはシュヴァルツの不等式

$$\left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)$$

になる．これは λ についての三項式 $\sum_i (a_i + b_i\lambda)^2$ はつねに正または0であることから証明される．したがって，三角不等式はつねに成立する．

等号は，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\dfrac{a_i}{b_i} = -\lambda$ のときだけ成立する．すなわち

$$\frac{x_1 - z_1}{y_1 - z_1} = \cdots = \frac{x_i - z_i}{y_i - z_i} = \cdots = \frac{x_n - z_n}{y_n - z_n}$$

のときである．したがって，三点 x，y，z が一直線上にあるときである．

R^n において，他の便利な距離は

$$d_2(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$$

である．第三のものは

$$d_3(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

である．

座標 x_i を直交座標とすれば，d_1 の球（$d_1(x, y) \leqslant r$）は R^2 では円，R^3 では球面が境界である（斜交軸では楕円または楕円体となるのであろう）．直交座標では，d_2 の球は R^2 では座標軸に平行な辺をもった正方形（R^3 では立方体）が境界である，そして d_3 の球は R^2 では座標軸のなす角の二等分線に平行な辺をもった正方形（R^3 では正八面体）が境界である．

d がある空間における距離，f が R_+ で定義された正値な実数値関数，$f(0) = 0$ で，任意の $x > 0$，$y > 0$ に対して $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ が成立するものであるとき，$f(d)$ は d と同じ球をもつ距離である［一般には，それぞれの球は d と $f(d)$ に対して異なる半径となる］．特に，f として増加凹関数をとることができる．たとえば，d が距離のとき，$\dfrac{d}{1+d}$ はまた別の距離で，それは最初のものと同じ球をもちかつ有界である．

ある空間上にいくつかの距離 $d_1, d_2, \cdots, d_p$ が定義されているとき

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_p^2}$$

はまた別の距離になる（シュヴァルツの不等式の結果），また $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_p$ と $d = \sup_i d_i$ についても同様であることが容易に証明される（最後の場合，d に対する中心が m で半径が r の球は距離 d_i に対する同じ中心同じ半径の球の共通部分である）．

最後につぎのことを注意しよう．ある空間上に距離の列が定義されているとき

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n}{1 + d_n}$$

とおいて新しい距離が定義できる．

測 地 的 距 離

距離空間 E と E の部分空間 F が与えられているとき，$E \times E$ から R_+ への写像 d の $F \times F$ への制限は明らかに F における距離で，それを E の距離から導入された距離という．たとえば，E が R^3 で F が球面 S であるとき，R^3 のユークリッドの距離によって S 上に距離（弧の長さ）が与えられ，それはまた S から R^3 への延長の距離と呼ぶことができる．しかし，これから別の距離，すなわち測地的距離を定義できる．

与えられた点 a と b とを結ぶ連続な路が F 上に少なくとも一つ存在すると仮定する．このような路としては，$f(0) = a$，$f(1) = b$ を満たす線分 $[0, 1]$ から F への連続写像 f であるとする．任意の有限列 $\{t_i\}$，$t_0 = 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_i \leqslant \cdots \leqslant t_n = 1$ に対して，点 $a, \cdots, m_i = f(t_i), \cdots, b$ と正の実数 $L(\{t_i\}) = d(a, m_1) + \cdots + d(m_i, m_{i+1}) + \cdots + d(m_{n-1}, b)$ を対応できる．すべての有限列 $\{t_i\}$ に対して，これらの数の集合が上限をもつとき，その路は長さがあるといい，$\sup L(\{t_i\}) = L(f)$ がその路の長さである．

このとき $\delta(a, b) = \inf L(f)$（inf は a と b を結ぶすべての路に対して計算する）が一つの距離である．実際，

1° $\delta(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$ は明らかである．

なぜなら，$a = b$ のときは，a と b を結ぶ長さ零の路（すべての $t \in [0, 1]$ に対して $f(t) = a$）が存在し，$a \neq b$ のときは，すべての路は少なくとも $d(a, b) > 0$ に等しい長さをもつからである．

2° 対称性は明らかである．

3° $\varepsilon > 0$ が与えられていると，

$$L(f_{ac}) < \delta(a, c) + \varepsilon, \qquad L(f_{cb}) < \delta(b, c) + \varepsilon$$

であるような路 f_{ac} と f_{cb} が存在する．

しかるに，容易に二つの路の和を定義できる（それは

$$\varphi(t) = f_{ac}(2t) \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi(t) = f_{cb}(2t-1) \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\right)$$

で定義された写像 φ である). そして路の和の長さはそれぞれの路の長さの和である. しかるに, φ は a と b を結ぶ路であるから,

$$\delta(a, b) \leqslant L(\varphi) = L(f_{ac}) + L(f_{cb}) \leqslant \delta(a, c) + \delta(b, c) + 2\varepsilon$$

が成立する.

ε は任意であるから, 三角不等式が得られる. 上に述べた定義を適用して R^3 のユークリッドの距離から球面 S_2 上に定義される測地的距離は, 二点を結ぶ大円の二つの弧のうちの最小のものの長さであることが初等的に証明できる.

3. 等 長 写 像

距離空間 E（距離は d）から距離空間 F（距離は δ）の上への一対一写像 f は, E の任意の点の対に対して,

$$d(a, b) = \delta[f(a), f(b)]$$

が成立するとき等長写像と呼ばれる.

これは初等幾何学の変換の場合には, 困ったことに平行移動と対称移動と呼ばれるものである（それらはそれぞれ直接等長写像または逆等長写像と呼んだほうがよいだろう）[1].

E' が E の部分空間ならば, f の E' への制限は E' から $f(E')$ 上への等長写像であることは明らかである. しかし, E と F の二つの部分空間のあいだに存在する等長写像を全空間に拡張可能であることは, 必ずしも真ではない, したがって定理の対象となるであろう.

たとえば, $E = F = R^2$ のとき, 一直線上にない三点を結んで作られた二つの部分集合のあいだの等長写像はただ一通りの方法で全空間に拡張できる. これは三角形の合同の第三の場合の改良した形である. E と F が等しい半径の二つの球面であるとき, 距離が延長の距離であるかまたは対応する測地的距離であるならばまた真である. これらの同じ距離に対して, 異なる半径の二つの球面上では真ではない. （これらの例は合同の場合の常用の証明でいかに《示されていない公理が重大である》かを示している.）

---

[1] 距離と等長写像の概念を用いて初等幾何学の公理化を最も容易に与えることができる. それによると幾何学の常用の操作（距離をはかる, 折りまげる, 等…）で公理が表わされるという意味で, 単純でかつ《具体的》であろうと思われる.

4. 連 続 性

距離空間Eから距離空間Fへの写像fの連続性の第三の定義を思い起こそう．fが点x_0で連続であるというのは，中心$f(x_0)$の任意の球の逆像が中心x_0の球に含まれるということであった．ここでつぎの概念を導入しよう．

定義.　中心がxの一つの球を含む任意の集合を点xの近傍と呼ぶ．

したがって《fがx_0で連続であるとは$f(x_0)$の任意の近傍の逆像がx_0の近傍であるときにかぎる》ということができる．これは連続の概念の直観的な内容をすべて保存しているという利点をもった簡単で一般的な表現である．

fはEのすべての点で連続であると仮定する．EとFの開集合を用いてこのことを非常に簡単に表わすことができる．

定義.　距離空間の開集合とは（いくつかの）開球の合併である．

中心がx，半径rの開球を$B(x,r)$とするとき，$y\in B(x,r)$ならば，$d(x,y)=r'<r$が成立することに注意して，これに三角不等式を用いると$B(y,r-r')\subset B(x,r)$が成立する．これより開集合の別の定義が得られる，すなわち，

開集合はそのすべての点の近傍になっている集合である．これより《Fの任意の開集合の逆像がEの開集合であるときにかぎって，fはEからFへの連続写像である（すなわちEのすべての点で連続である)》が導かれる．

連続についてのこの定義によって，容易につぎの定理が証明できることを注意しよう．E,F,Gが三つの距離空間，fがEからFへの連続写像，gがFからGへの連続写像のとき，写像の結合$g\circ f$はEからGへの連続写像である．

$A\subset F$で，$\complement A$でAの補集合を表わすとき，

$$f^{-1}(\complement A)=\complement f^{-1}(A)$$

が成立する．したがってその補集合が開であるような集合を閉集合と呼べば，前に述べた定義で開という語を閉という語でおきかえて連続についての同値な定義が得られる．

集合に接触する点の概念を用いて閉集合についての別の定義を与えることができる．

定義.　a が A に接触するというのは，a の任意の近傍 V に対して，$V \cap A \neq \varnothing$ が成立するときである（明らかにこれは中心 a の球に対して成立すれば十分である）.

集合 A の接触集合 $\overline{A}$ はその接触点の集合である．任意の A に対して，$A \subset \overline{A}$ が成立する.

定理.　集合はその接触集合と一致するときにかぎって閉集合である.

実際，A が閉集合であるとは，$\complement A$ が開集合であることであったから，もし $a \notin A$ ならば，$\complement A$ の中に含まれる球 $B(a, r)$ が存在する．よって $B(a, r) \cap A = \varnothing$ でかつ $a \notin \overline{A}$，したがって $\overline{A} \subset A$，すなわち $\overline{A} = A$．逆に，$A = \overline{A}$ ならば，任意の点 $a \notin A$ に対して，$B(a, r) \cap A = \varnothing$ であるような球 $B(a, r)$ が存在する．したがって $B(a, r) \subset \complement A$ で $\complement A$ は開集合である.

閉球は閉集合であることがただちに証明される（これが閉球という用語のつけられた理由を示している）.

開集合はつぎの二つの非常に重要な性質をもっている.

(O_1)　任意個の開集合の合併は開集合である．これは定義から直接得られる結果である.

(O_2)　任意の有限個の開集合の共通部分は開集合である（空集合は開集合と考える）.
実際，$O_1, O_2, \cdots, O_n$ を共通部分が空でない n 個の開集合とし，$a \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ とする．$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して O_i に含まれる一つの球 $B(a, r_i)$ が存在する．よって，$B(a, \inf r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ が成立する．これで証明された.

開集合の補集合である閉集合は双対な性質をもつ（読者は閉集合の定義 $A = \overline{A}$ を用いて上と同様にして直接証明できるだろう）.

(F_1)　任意個の閉集合の共通部分は閉集合である.

(F_2)　任意の有限個の閉集合の合併は閉集合である.

5. 位相の概念

二つの集合 E と F が与えられているとき，E 上の距離 d（または F 上の δ）によって E（または F）は距離空間 E_d（または F_δ）になる．$\mathscr{C}(E_d, F_\delta)$ を E_d から F_δ への連続

写像の集合とする（これは E から F への写像全体の集合の部分集合である）．$\mathscr{C}(E_d, F_\delta$ を修正しないで，d または δ，あるいはこの二つをかえることができるかということが重要な問題である．ここではこれと類似なつぎの問題を考えよう．

d_1 を E 上に与えられた距離とする．任意の距離空間 F_δ に対して，

$$\mathscr{C}(E_{d_2}, F_\delta) = \mathscr{C}(E_{d_1}, F_\delta)$$

が成立するためには，E 上の距離 d_2 はどのようなものでなければならないか．

d_1 に対応する開集合の族 $\mathscr{O}_1$ が d_2 に対応する開集合の族 $\mathscr{O}_2$ に一致することが十分条件であることは明らかである．しかしこれはまた必要条件でもある．なぜなら，ある集合が $\mathscr{O}_1$ に属して $\mathscr{O}_2$ に属さないときは，$F_\delta = E_{d_1}$ とすれば十分であり，E から自分自身への恒等写像は $\mathscr{C}(E_{d_1}, E_{d_1})$ に属するが $\mathscr{C}(E_{d_2}, E_{d_1})$ には属さないことが証明される．

d_1 と d_2 に対して同じ開集合が与えられるための条件はつぎのことと同値である．任意の $a \in E$ に対して，d_1 に関する任意の球 $B_1(a, r)$ が d_2 に関する一つの球 $B_2(a, r')$ を含むこと，およびその逆が成立することである．

これにより前に定義した R^n 上の三つの距離 d_1, d_2, d_3 によって同じ開集合が与えられその結果任意の距離空間 F_δ に対して同じ集合 $\mathscr{C}(R^n, F_\delta)$ が与えられる．

したがって，E 上の与えられた距離が集合 $\mathscr{C}(E, F)$ を定義するとしても，与えられたこの集合および任意の F に対してのこれらの集合さえもが明らかに E の距離を定義しないことがわかる．

距離の概念から連続の定義が導かれた．結局，それは距離自身には関係しないで，それから定義された開集合だけに関係する．

したがって，空間 E 上に定義された写像の連続性だけを問題とするときは，距離構造は必要以上に精密すぎる．これによって，より一般的な構造，すなわち位相構造の定義へ導かれる．

集合 E が与えられて，つぎの二つの公理を満足する E の部分集合の族 $\mathscr{O}$ が与えられるとき，E 上に位相 $\mathscr{T}$ が定義されたという．

(O_1)　$\mathscr{O}$ に属する集合の任意の合併は $\mathscr{O}$ の集合である．

(O_2)　$\mathscr{O}$ の集合の任意の有限個の共通部分は $\mathscr{O}$ の集合である．

（合併と $\mathscr{O}$ の空部分集合の共通部分に関しての約束から，E および E の空部分集合が $\mathscr{O}$ に属することが導かれる．）

$\mathscr{O}$ に属する集合は位相 $\mathscr{T}$ についての E の開集合と呼ばれ，また E は位相空間と呼ばれ

る．

E と F が位相空間のとき，E から F への写像 f は F の任意の開集合の逆像が E の開集合であるときにかぎって連続である．

上に与えたすべての定義はただちにつぎのものにおきかえられる．すべての開集合の補集合を閉集合と呼ぶならば，閉集合の族 $\mathscr{F}$ は公理 (F_1) と (F_2) を満足し，この二つの公理を満足する E の部分集合の族 $\mathscr{F}$ によって明らかに $\mathscr{T}$ が定義できる．

同様に，ある点を含んでいる開集合を含む任意の集合をその点の近傍と呼べば，集合 A の接触点とはこの点の任意の近傍 V に対して，$V \cap A \neq \emptyset$ が成立するような点で，集合の閉包 $\overline{A}$ はこれら接触点の集合である．閉集合は $A = \overline{A}$ が成立する集合であることが証明される．

二つの位相空間 E と F との同相写像とは，E から F への一対一で両連続な写像である．

しかし，これらの定義は一般化して得られたものであるから，多くの問題はたとえばつぎのようになる．

集合 E に位相が与えられているとき，それは E 上の距離構造から導かれるか．

前に定義した一般的な位相構造が，たとえば R^n のような特別な性質をもつためにはどのような制限を与えればよいか．

トポロジーの任務は，その理論の条件のもとで，これらの型の問題に解答を与えることである．

距離空間の構造に関連した概念

ソルボンヌ大学教授

G. ショケ

距離空間についてのルヴュ氏の講義で，距離空間の位相とある距離空間から他の距離空間への写像の連続性が定義された．

数直線についての前の講義で，わたくしは連続性の中に一様連続というものがあることを示した．この概念は任意の距離空間において意味をもつことがわかる．より一般的に，距離空間において集合の大きさを問題にできるという事実から得られる結果を調べよう．

距離空間はつぎのような距離 $d(x, y)$ (E^2 から R_+ への写像として定義されたもの) をもった集合Eであることを思い起こそう．

1) $x \neq y$ のとき $d(x, y) > 0$,　　$x = y$ のとき $d(x, y) = 0$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$.

3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

定義 1.　距離空間の部分空間 A について，すべての$x, y \in A$ に対しての距離$d(x, y)$ の集合の上限 $\delta(A)$ を A の直径と呼ぶ．

これは有限または無限の数 $\geqslant 0$ である．

たとえば，円板の直径は初等的な意味での直径の長さであり，正三角形の直径はその辺の長さである．また，直線上の区間 $]a, b[$ の直径は $(b-a)$ である．

つねに，$\delta(A) = \delta(\bar{A})$ が成立し ($\bar{A}$ はAの閉包である)，A が空集合または一点だけからなるときだけ $\delta(A) = 0$ である．

Aはその直径が有限であるとき有界であるといわれる．

1. 一 様 連 続

f を距離空間 E から距離空間 F への写像とする．E における f の連続性は，距離を用いてつぎの形で表わされる．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists \eta > 0;$$
$$[d(x, y) < \eta] \text{ ならば } [d(f(x), f(y)) < \varepsilon]$$

η は ε と x に関係する数である．x に無関係なこのような η が存在するとき f は一様連続であるという．またはより簡単に，

定義 2.　任意の $\varepsilon > 0$ を与えたとき，任意の $A \subset E$ に対して，条件 $\delta(A) < \eta$ ならば，$\delta(f(A)) < \varepsilon$ が成立するような $\eta > 0$ が存在するとき f は一様連続であるという．

直径 $\delta(f(A))$ を A 上の f の振幅と呼べば，f の一様連続性は，A 上の f の振幅は A の直径が小さいときは小さいといい表わされる．この見方は連続率によって精密にできる．φ を $[0, \infty[$ 上で定義された増加実数値関数とするとき，f が連続率として φ をもつというのは，任意の $x, y \in E$ に対して，

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y))$$

が成立することである．

f の一様連続性は，$u \to 0$ のとき $\varphi(u) \to 0$ であるような連続率 φ が存在することと同値であることが証明される．

最も用いられる連続率は線型関数 $\varphi(u) = ku$ である．f がこのような連続率をもつとき，f は倍率 k のリプシッツ型であるという．よってこの条件は

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$$

と書かれる．

例.　1) f が R 上で微分可能な実数値関数で，その導関数 f' が $|f'| \leqslant k$ を満たすとき，f は倍率 k のリプシッツ型である（平均値の定理を用いる）．

2) A を E の部分集合，$x \in E$ とするとき，数 $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ を x から A への距離と呼ぶ．

E から R への写像 $x \to d(x, A)$ は倍率 1 のリプシッツ型である．

R から R への写像 $x \to |x|$ はこの特別な場合である．

3) R^2 から R への写像 $(x, y) \to x + y$ はリプシッツ型であり，写像 $(x, y) \to xy$

はそうではない．しかし x または y を R の有界部分集合の中にあるとすればリプシッツ型である．

関数 f が一様連続ならば，それはすべての点で連続であることがただちにわかる．逆は真ではない．たとえば，実数値関数 $x \to x^2$ は連続であるが，関係

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

より，どんな条件 $|x - y| < \eta$ からも，$|x^2 - y^2|$ に対する上界が得られないことが示されるからである．

練習として記すつぎの性質から類似の多くの例が作られるだろう．

f を $E = R^n$ で定義された，またはより一般的に R^n の凸集合で定義された一様連続な実数値関数とする．このとき，任意の $x \in E$ に対して $|f(x)| \leqslant a \| x \| + b$ であるような二つの定数 $a, b \geqslant 0$ が存在する．ここで $\|x\|$ は 0 から x への距離を表わす．

一様連続関数の結合

1)　一様連続な二つの関数の結合 $g \circ f$ はまた一様連続である．

2)　f と g がそれぞれ倍率 k_1 と k_2 のリプシッツ型ならば，$g \circ f$ は倍率 $k_1 k_2$ のリプシッツ型である．

応用．　f を E における実数値関数とすると，f が一様連続（または倍率 k のリプシッツ型）ならば，$|f|$ もそうである．したがって，f と g が一様連続（またはリプシッツ型）ならば，$(f + g)$，$\sup(f, g)$，$\inf(f, g)$ についても同様であり，f または g の少なくとも一つが E で有界のときは fg についても同様である．

二つの距離空間の同型

空間の位相はその空間の開集合によって完全に決定され，この概念によって二つの空間 E と F の同型の概念が与えられることを知っている．E から F 上への一対一写像 f が位相的に同型である（または同相写像）というのは，f によって E の開集合が F の開集合に移るときである．すなわち，これは f と f^{-1} が連続であるということと同じことである．

同様に，一様連続の概念によって距離空間上に同型の概念が与えられる．

定義 3.　距離空間 E から距離空間 F 上への一対一写像 f は，f と f^{-1} とが一様連続であるとき，一様構造の同型写像であるといわれる．

位相的同型は必ずしも一様ではない．たとえば，R から R 上への写像 $x \longrightarrow x^3$ は同相写像であるが，一様同型写像ではない．

よって，同じ集合 E 上の二つの距離 d_1 と d_2 によって同じ《一様構造》は定義されなくとも，同じ位相を E 上に定義することができる．d_1 と d_2 が E 上に同じ一様構造を定義するためには，$d_1(x, y)$ が小さいときは $d_2(x, y)$ も小さい，およびその逆も成立することが必要十分である．たとえば，d が E 上の距離であるとき，それは（一様構造に対して）距離 $\dfrac{d}{1+d}$ と d^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ に同値である．R^2 においては，一般にノルムに関連した距離

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad |x_1| + |x_2|, \quad \text{または } \sup(|x_1|, |x_2|)$$

を用いる（ここで x_1, x_2 は x の座標である）．これらのいろいろな距離は同値である．

E から F への写像の連続性は E と F の位相だけに関係するのと同様に，f の一様連続性は E と F の一様構造だけに関係する．

コンパクト空間で定義された連続写像

一様連続でない連続関数が存在することはわかっている．たとえば，R から R への写像 $x \longrightarrow x^2$，この場合空間 E と F は有界ではない．しかし E と F が有界の場合の類似な例が存在する．たとえば，写像 $x \longrightarrow \sin\dfrac{1}{x}$ は $]\,0, 1]$ から $[-1, +1]$ への連続写像であるが一様連続ではない．

これに反し，E がコンパクトであるときはこのような反例は見つけることができない．これがつぎに述べる基本定理である．

定理 1.　コンパクト距離空間 E から任意の距離空間への任意の連続写像 f は一様連続である．

証明はコンパクト空間を扱った講義で与えられるだろう．

2. コーシー列，完備空間，逐次近似の方法

距離空間 E の点の収束列の定義には，その数列の極限点が必要である．しかるに，その極限値を必要としないで，数列が収束するかどうかを知ることはしばしば関心をひきおこす．コーシーが最初に，実数の数列に対して極限値とは独立な収束の規準を与えた．

定義 4.　Eを距離空間，(x_n)をEの点列とする．p, qが$\to\infty$のとき，$d(x_p, x_q)\to 0$ ならば，この点列はコーシー列であるという．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して，整数n_0 が存在して，$p, q\geqslant n_0$ ならば，$d(x_p, x_q)<\varepsilon$ であるという関係が成立することである．

この条件はまたつぎのように表わすことができる．集合 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ を X_n で表わそう．すると，$n\to\infty$ のとき $\delta(X_n)\to 0$ ならば (x_n) はコーシー列である．

収束するすべての数列はコーシー列であることはただちにわかる．逆は一般には真でない．たとえば，$\sqrt{2}$ に収束する小数の列 $(1, 1.4, 1.41, \cdots)$ は有理数の集合 Q の中でのコーシー列であるが，Q においては収束しない．

ところで，コーシー列が収束するような距離空間に注目することは重要である．このことからつぎの定義が導かれる．

定義 5.　距離空間Eのコーシー点列がすべて収束するとき，Eは完備であるという．

有理数の空間 Q が完備でないことは調べたばかりである．これに反し，前の講義より，R が完備であることがわかる．

Rのコーシー列の例.　1）減少しながら0に収束する a_n から作られた任意の交代級数 $a_1-a_2+a_3-\cdots$ の部分和 S_n の数列.

2）級数 $|b_1|+|b_2|+\cdots$ が収束するような任意の級数 $b_1+b_2+\cdots$ の部分和 S_n の数列.

完備空間と完備でない空間の例.　1）R の任意の閉区間は完備である．R の（R 自身以外の）任意の開区間は完備でない．

2）ユークリッド空間 R^n は完備である．実際，R^n の任意のコーシー列を各座標軸へ射影したものは，その距離が減少するからまたコーシー列である．したがって，n 個の射影された点列は収束し，よって与えられた点列は収束する．

3）コンパクト距離空間は完備である．

同型写像による完備空間の不変性

R から $]-1, +1[$ 上への写像 $x\to\dfrac{x}{1+|x|}$ は同相写像である．しかるに，それは完備な距離空間 R を完備でない距離空間 $]-1, +1[$ へ写像する．したがって，完備空間の概念は位相的な概念ではない．これは同相写像によって，必ずしもすべてのコーシー

列がコーシー列に移らないことに原因がある.

これに反して，E から F への任意の一様連続写像 f は E のすべてのコーシー列を F のコーシー列に移す，したがって，二つの空洞 E と F のあいだの任意の一様同型写像はコーシー列をコーシー列に移す．特に，一方が完備ならば他方も完備である.

したがって，距離空間が完備であるということはそれが一様同型写像で不変であるということであり，これがその一様構造の一つの性質である.

以下有用ないくつかの性質を述べ，その証明は演習として提供する.

1)　完備空間 E において，直径が0に収束するような閉集合 F_n からなる任意の減少列は，空でない共通部分をもちそれは一点になる．この点の任意の近傍はその列の一つの集合を含む.

2)　完備空間のすべての閉部分空間は完備空間である.

3)　距離空間のすべての完備部分空間はこの空間において閉である.

4)　距離空間において，完備な二つの部分空間の合併と共通部分は完備な部分空間である.

一様連続関数の延長

解析学ではしばしば E のいたるところ密な部分集合 A（すなわち，E の任意の開集合が A の点を含むようなもの）上で定義された関数を集合 E 全体に連続的に延長することが問題になる．このような延長の存在はしばしばつぎの定理の結果である.

定理 2.　E を距離空間，A を E のいたるところ密な部分集合，f を A から完備な距離空間 F への一様連続写像とする.

f をただ一通りの方法で，E から F への連続写像に延長することができる．この延長はまた一様連続である（そして f と同じ連続率をもつ).

以下証明のシェーマを示す.

任意の $x \in E$ と任意の整数 n に対して，$B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ を中心が x，半径 $\dfrac{1}{n}$ の E の閉球とする．集合 $V_n = \overline{f\left(A \cap B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)\right)}$ は直径が0に収束する（f の一様連続性による）ような閉集合の減少列をなす．よってそれらは共通なただ一つの点をもつ．それを $g(x)$ と表わそう.

任意の $x \in A$ に対して $g(x) = f(x)$ が成立する．他方，任意の $X \subset E$ に対して，

$g(X) \subset \overline{g(A \cap X)}$，これより $\delta(X) \to 0$ のとき $\delta(g(X)) \to 0$ となる．したがって g は一様連続である．

例．　1)　有理数の集合 Q 上で定義された a^x の R 上への延長．

2)　f を $]0, 1]$ 上で定義された微分可能な実数値関数で，かつ $|f'| < k$ であるようなものとする．よって f はリプシッツ型であり，したがって一様連続である．ゆえにそれを $[0, 1]$ 上で定義された連続関数に延長できる．

逐次近似の方法

解析学の多くの領域（代数方程式，微分方程式，積分方程式）で用いられる有用な方法を述べよう．これについての関心はまず第一に E. ピカールの著作で強調された．それはつぎの非常に簡単な形に形式化することができる．

まず，距離空間 E から他の距離空間 F への写像 f が，E の任意の点対 x_1, x_2 に対して，

$$d_F(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda d_E(x_1, x_2)$$

を満足するとき，f は（倍率 λ の，ここでは $0 \leqslant \lambda < 1$）**縮小写像**であるという．これは倍率 $\lambda < 1$ のリプシッツ型写像にほかならない．

例．　E がユークリッド空間 R^n で，f が倍率 $\lambda < 1$ の相似変換である．

定理 3.　E を完備距離空間，f を E からそれ自身への縮小写像とする．

方程式 $x = f(x)$ はただ一つの解 a をもつ．任意の $x_0 \in E$ に対して，点 x_0 をつぎつぎに変換した $x_n = f^n(x_0)$ からなる列は a に収束する．（f^n は $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}$ を意味する．）

証明．　$x_{p+1} = f(x_p)$ という関係から，任意の n に対して，対 (x_{n-1}, x_n) は対 (x_n, x_{n+1}) に変換される．

よって $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda d(x_{n-1}, x_n)$ が成立する．この形のはじめの n 個の関係から

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda^n d(x_0, x_1)$$

が得られる．これより

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_0, x_1) \sum_n^{\infty} \lambda^p.$$

$0 \leqslant \lambda < 1$ であるから，x_n の列はコーシー列である．

a をその極限点とすれば，f は連続であるから

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

が成立し，他方 $x_{n+1}=f(x_n)$ より，極限値として $a=f(a)$ が得られる．

この解 a が方程式 $x=f(x)$ のただ一つの解である．なぜなら，a' を別の解とすれば

$$d(a,a')=d(f(a),f(a'))\leqslant \lambda d(a,a') \qquad \text{これより } d(a,a')=0.$$

よって $a=a'$ が成立するからである．

ここで用いた方法で解 a の近似計算のやり方が与えられることを注意しよう．なぜなら，一般項が $d(x_n,x_{n+1})$ の数列は公比が λ の等比級数よりもはやく収束する．より正確には

$$d(x_n,a)=\lim_{p\to\infty} d(x_n,x_{n+p})\leqslant d(x_0,x_1)\frac{\lambda^n}{1-\lambda}$$

が成立するからである．

この収束がまた非常にはやいということが起こりうる．たとえば，f の a の近傍 V への制限が次数 $\lambda(V)$ の縮小写像であって，V の直径を 0 にもっていくと $\lambda(V)$ も 0 になるときである．

空間 E が有界であるときは，a の存在とその一意性はまったくに明らかである．なぜなら $f^n(E)$ は減少であり，$f^n(E)$ の直径は $\leqslant \lambda^n\delta(E)$ であるからである．

例．　1）$E=R^n$ で f が倍率 $\lambda<1$ の相似変換のとき，点 a はその相似の中心にほかならない．これによって存在が示される．

2）$y=f(x)$ を有界閉区間 $E=[a,b]$ 上で定義された微分可能な実数値関数で，その値の集合が同じ $[a,b]$ の中に含まれており，$|f'(x)|\leqslant\lambda$（$\lambda<1$）であるとする．

$[a,b]$ からそれ自身への写像 f は倍率 λ の縮小写像であり，上の方法が適用される．

この方法の微分方程式への応用はここでは示さない．

距離空間の完備化

完備空間のこれまでの研究で空間を完備空間にしようという興味が起こる．それゆえ，数学の理論で完備でない距離空間が導入されたときは，ほとんどいつでもそれが完備になるように新しい元をつけ加えることを試みる．理論的には，この完備化はいつでも可能であり，それはある意味でただ一通りのやり方で可能である．より正確には，与えられた空間 E のコーシー列を用いて，E に等長でいたるところ密な部分空間（E と同一視するのが便利である）を含むただ一つ（等長の意味で）の完備空間 $\hat{E}$ が存在することが証明される．

しかし，この抽象的な完備化は E につけ加える新しい元の説明がなされなければ少しも興味がないもので，完備化の真の仕事はこの説明を与えることにある．しばしばこれは困難ではあるが，その中でしかその理論が発展できない当然の領域がなんであるかが示されるから，非常な好結果がもたらされることが多い．

例.　1）ノルム

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

に伴った距離をもつ $[0,1]$ 上の実数値連続関数の線型空間を E とする．

この距離空間は完備ではない．完備空間 $\hat{E}$ の元は $[0,1]$ 上でルベーグの意味で積分可能な関数である（これは測度が 0 の集合上だけで異なる二つの関数を同一視するという約束をする）．

前のノルムを

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)\,dt$$

で定義されたものでおきかえても類似な例が得られる．

ここでの新しい関数はその平方が積分可能な可測関数である[1]．

2）R^2 で定義され，コンパクトな集合の外では 0 で，連続微分可能な実数値関数の線型空間を E とする．

$$\|f\|^2 = \iint\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

で定義されたノルムによって E 上の距離が与えられる．距離空間 E は完備ではないが，E を完備にするためにつけ加える元は興味ある性質をもった新しい関数である[2]．

3. 一様収束の位相

これまでは一つの関数の行動についてだけ調べてきたが，関数族の行動を調べることで，さらに進歩することができる．このような研究の最も初歩的な段階は，関数列の単純収束の概念である．

定義 6.　f_n を集合 E からある位相空間 F への写像列とする．任意の $x \in E$ に対して，$f_n(x) \to f(x)$ であるとき，この列は（E から F への写像）f へ単純収束すると

---

[1] たとえば加藤敏夫著“位相解析”§13～§18 参照．［訳注］

[2] たとえば，現代応用数学，吉田耕作著“位相解析 I”（岩波書店）§5 参照．［訳注］

いう.

この収束の仕方は数学で非常な重要性をもっており，また名誉ある地位を与えられてはいるが，ほかの多くの収束の仕方（下の例を参照）が必要に応じて導入されて用いられる.

実際，単純収束をする関数列のグラフを調べてみると，単純収束はわれわれの収束についての直観的な概念によく合致しないことがわかる.

たとえば，f_n を

$$\left[0, \frac{1}{n}\right] \text{上で} \qquad f_n(x) = n^2x(1-nx)$$

$$\text{上以外で} \qquad f_n(x) = 0$$

によって $[0, 1]$ 上で定義された実数値関数とする.

関数列 (f_n) は関数 $f=0$ に単純収束する. しかるに，関数 f_n のグラフは f のグラフに収束しない. これより収束についてつぎの新しい定義が導かれる.

定義 7.　(f_n) を集合 E から距離空間 F への写像の列とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して，すべての $x \in E$ とすべての $n > n_0$ に対して，$d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ が成立するような n_0 が存在するとき，この列 (f_n) は（E から F への写像）f に一様収束するという.

上の例では，列 (f_n) は一様には 0 に収束しない. よって単純収束は一様収束を含まない. これは f と f_n が連続であっても，E がコンパクトであっても，また f_n が有界の場合であってもそうである.

これに反して，一様収束ならば明らかに単純収束する.

この定義には始集合 E 上にはなんらの位相も仮定していないという重要な事実を注意しておこう. これに反して，終集合 F が距離空間であることが要求される.

一様収束の距離と位相

E から F への写像の集合 $\mathscr{F}(E, F)$（説明を簡単にするために空間 F は有界であると仮定する）上に距離を導入することによって，一様収束の研究をより直観的にまたより都合のよいものにすることができる.

f と g を E から F への二つの写像とする. すべての $x \in E$ に対して，$d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$ であるとき f と g は ε の近さであるという. これらの数 ε の最小値は f と g の距離と呼ばれる. それはまた $d(f, g) = \sup_{x \in E} d(f(x), g(x))$ に等しい.

$d(f,g)$ は $\mathscr{F}(E,F)$ 上の距離であることは容易に証明される．このように定義された $\mathscr{F}(E,F)$ 上の距離は一様収束の距離である．

さて，一様収束をつぎのようにうまく説明できる．列 (f_n) が一様に f に収束することは $d(f,f_n)\to 0$ と同値である．すなわち，$\mathscr{F}(E,F)$ において点の列 (f_n) は点 f に収束する．

F の距離を他の同値なもの（一様構造に関して）でおきかえるとき，$\mathscr{F}(E,F)$ 上に得られた二つの距離はまた同値であることを注意しよう．したがって一様収束の概念は F の一様構造だけに関係する．

連続関数の一様極限

さて始集合に位相が与えられていると仮定すると，連続関数についての一様収束の効果を研究できる．ここでは基本的な結果だけを述べ，証明は演習とする．

定理 4.　E を位相空間，F を距離空間とする．E から F への連続写像列が写像 f に一様収束するならば，この写像 f は連続である．

例.　(u_n) をすべての x に対して $|u_n(x)|\leqslant a_n$ であって，級数 $\sum a_n$ が収束するような $[0,1]$ 上で連続な実数値関数の列とする．このとき，級数 $\sum u_n(x)$ は一様に収束し（すなわち，部分和の列 $S_n(x)$ が一様に収束する），その和は連続関数である．

級数 $\sum \dfrac{1}{3^n}\cos(2^n x)$ がこの場合である．

単純収束の場合には類似な定理が成立しないことを注意しよう．たとえば，$x=0$ のときは 0 で $x\neq 0$ のときは 1 に等しい関数 f に単純収束するような R 上の連続関数列を作ることができる．

一様収束の距離をもった連続関数の空間は数学では非常な重要性がある．特に，$[0,1]$ 上で連続な実数値関数の空間 $\mathscr{C}([0,1])$ はつねに用いられる．これは体 R 上の（無限次元）線型空間である．一様収束のその距離はノルム $\|f\|=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ に伴ったものである．この距離に関して，それは完備である．それが局所コンパクトでないことは容易に証明される．

4. 結　論

この講義で多くの概念，すなわち関数の一様連続性，コーシー列，完備空間，一様収束を扱った.

これらの概念は対象にしている空間の距離から定義された．しばしば，それらは一様同型である距離をかえても不変であることを注意した．したがって，これらの概念は距離の概念には属さないから，それらを距離のつかない空間へ拡張することが期待できる.

実際，位相群（すなわち，写像 $x \longrightarrow x^{-1}$ と $(x, y) \longrightarrow xy$ が連続であるような位相の与えられた群）に対して類似な概念が定義できる．またより一般的に<u>一様空間</u>と呼ばれる空間に対しても定義できる．一様空間とは部分集合に対してその大きさの次数をきめることができ，それに対しては距離空間の対応する公理が成立するような構造の与えられた集合にほかならない.

いくつかの関数空間といろいろな収束の仕方についての研究

ソルボンヌ大学講師

J. ディクスミイル

位相空間に関するこれまでの講義では，一般的な公理まで高めるために一つの例（実数の集合）から出発した．歴史的には，抽象的な理論を仕上げる前に，実数の例以外の別のものを分析することが必要であった．非常に重要ないくつかの例は関数空間，すなわち元が関数である空間によって与えられたのである．関数空間が深く研究されはじめたのは19世紀の末からである．

この講義では，関数空間のいくつかの例だけを与え，その例で前の講義のいくつかの一般的な概念について説明する．関数空間についての一般的な定理についてはここでは一つも述べない．

1. 第 1 の 例

$0 \leqslant x \leqslant 1$ で定義され，実数値をとる連続関数 $f(x)$ の集合を C で表わす．$f \in C$ かつ $g \in C$ のとき

$$d(f, g) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)|$$

と定義する[1]．

d が C 上の距離であることを証明する．つぎの性質を証明する必要がある．

1) 任意の f, g に対して，$0 \leqslant d(f, g) < +\infty$.

2) $f = g$ であるときにかぎって $d(f, g) = 0$.

---

[1] $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$ のような関数がある区間で上限をもつとき，それを $\sup \varphi(x)$ と表わすことを想起せよ．

3)　任意の f, g に対して，$d(f, g) = d(g, f)$.

4)　任意の f, g, h に対して，$d(f, h) \leqslant d(f, g) + d(g, h)$.

性質 1)，2)，3) はただちに得られる．一方，$f \in C$，$g \in C$，$h \in C$ であるとき，任意の $x \in [0, 1]$ に対して，

$$|f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |g(x) - h(x)| = d(f, g) + d(g, h)$$

が成立する．

ゆえに，任意の x に対して $d(f, g) + d(g, h)$ は $|f(x) - h(x)|$ の上界である．したがってまた $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - h(x)| = d(f, h)$ の上界である．これで性質 4) が証明された．

したがって，距離空間に関して発展させたすべての概念は，空間 C に適用される．C の関数 f_n の列が $f \in C$ に収束するというのは，$n \to +\infty$ のとき $d(f_n, f) \to 0$ ということである．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n \geqslant N$ という関係を満たすすべての n に対して $d(f_n, f) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ が成立するような整数 N が存在することである．f_n が f へ一様収束することの定義はすでに知っている．

(f_n) を C の関数列とする．f_n が一様収束するための必要十分条件であるコーシーの規準と呼ばれる微分学の古典的な定理がある．この条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，つぎのような整数 N が存在することである．$m \geqslant N$，$n \geqslant N$ ならば，任意の $x \in [0, 1]$ に対して $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ (すなわち，$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$，あるいは $d(f_m, f_n) \leqslant \varepsilon$) が成立する．この条件は列 (f_n) が空間 C におけるコーシー列であるといい表わされる．また，古典的な定理は連続関数列の一様極限値は連続であると述べている．したがって，空間 C は完備である．

空間 C 上の実数値関数とは何か．それは，すべての $f \in C$ に対して，実数 $A(f)$ を対応させる関数 $A(f)$ である．この関数 A が C 上で連続であるというのは，f_n が f に一様収束するとき，数 $A(f_n)$ が通常の意味で $A(f)$ に収束するということである．

例.　1)　$A(f) = \int_0^1 f(x)dx$ とおく．このとき A は古典的な定理により C 上の連続関数である．2)　$A(f) = f(1)$ とおく．すると A が C 上の連続関数であることは明らかである．

さて C から C への写像を考えよう．すなわち任意の $f \in C$ に対して，一つの $g \in C$ を対応させる変換 $g = T(f)$ である．T が連続であるとは，f_n が f に一様収束すると

き，$T(f_n)$ が $T(f)$ に一様収束することである．

例： 1) $T(f)=f_0f$，ここで f_0 は一つの固定した関数である．T が連続であることは明らかである．2) $T(f)$ を

$$g(x)=\int_0^1 e^{xy}f(y)dy$$

で定義された連続関数 g とする．T が連続であることを示そう．$f_n\in C$ を $f\in C$ に一様収束する列とする．$g_n=T(f_n)$，$g=T(f)$ とおくと，

$$|g_n(x)-g(x)|=\left|\int_0^1 e^{xy}f_n(y)dy-\int_0^1 e^{xy}f(y)dy\right|\leqslant\int_0^1 e^{xy}|f_n(y)-f(y)|dy$$
$$\leqslant e\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}|f_n(y)-f(y)|=e\,d(f_n,f)$$

が成立する．したがって $d(g_n,g)\leqslant e\,d(f_n,f)$．これで g_n が g に一様収束することが証明された．

2. 第 2 の 例

前と同じ集合 C をとる．$f\in C$ と $g\in C$ に対して，

$$d'(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$$

とおく．

d' が C 上の距離であることを示そう．第1の例で記した性質 1)，2)，3) はただちに得られる．三角不等式も容易である．すべての $x\in[0,1]$ に対して，$|f(x)-h(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$ が成立するから，

$$\int_0^1|f(x)-h(x)|dx\leqslant\int_0^1|f(x)-g(x)|dx+\int_0^1|g(x)-h(x)|dx,$$

すなわち，$d'(f,h)\leqslant d'(f,g)+d'(g,h)$ が成立する．

このように，関数の同じ集合 C に第2の距離空間の構造が与えられた．混乱を避けるために，この新しい距離空間を C' と表わそう．C' の意味での収束は平均収束と呼ばれる．連続関数列 (f_n) が C の意味で連続関数 f に収束するならば，すなわち一様収束するならば，(f_n) は C' の意味で f に収束する．なぜなら $|f_n(x)-f(x)|$ は一様に 0 に収束するから，$\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx$ は 0 に収束するからである．しかし，この逆は真ではない．それを例で示そう．$f_n(x)=x^n$，$f(x)=0$ とすると，$n\to+\infty$ のとき

$$d'(f_n,f)=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0$$

だから，(f_n) は C' の意味で f に収束する．しかし，$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}x^n=1$ であるから，(f_n) は f に一様収束しない．

したがって C 上に二つの自然な収束の概念が存在する（その他にここでは述べないが無数に多くのものがある）．この現象は関数空間では非常にあたりまえのことである．

C' は完備ではないことを証明しよう．連続関数 f_n をつぎのように定義しよう．

$$0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \quad \text{に対して} \quad f_n(x)=0$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{に対して} \quad f_n(x)=1$$

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right] \quad \text{に対して} \quad f_n(x)\ \text{は一次関数}$$

f を $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ では0，$x=\frac{1}{2}$ では $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ では1に等しい関数とする．

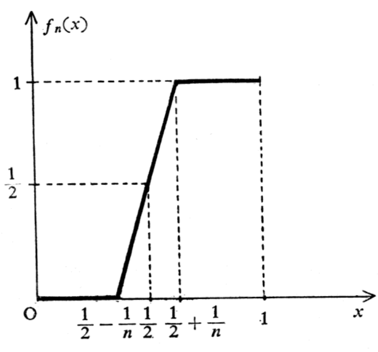


図　1

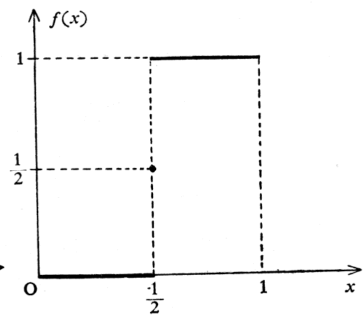


図　2

このとき，$\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx=\frac{1}{2n}\to 0$．したがって

$$d'(f_m,f_n)=\int_0^1|f_m(x)-f_n(x)|dx\leqslant\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx$$

$$+\int_0^1|f(x)-f_m(x)|dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\to 0.$$

ゆえに，列 (f_n) はコーシー列である．$d'(f_n,g)\to 0$ であるような連続関数 g が存在すると仮定する．不等式

$$\int_0^1|f(x)-g(x)|dx\leqslant\int_0^1|f(x)-f_n(x)|dx+\int_0^1|f_n(x)-g(x)|dx$$

で，右辺は $n\to+\infty$ のとき0に収束し，したがって $\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=0$ とな

る．しかるに，一点 $x=\frac{1}{2}$ 以外で $f(x)-g(x)$ は連続である．よって，f と g が異なるのは $x=\frac{1}{2}$ に対してだけである．ゆえに，$0\leqslant x<\frac{1}{2}$ に対して $g(x)=0$ であり $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ に対して $g(x)=1$ である．これは $x=\frac{1}{2}$ での g の連続性を否定している．

（新しい関数の添加と，上記の関数 f の例によって C' を拡大して，完備空間を得ることができる．これがルベーグの意味で積分可能な関数を導入する方法である．）

第1の例で考えた関数 $A(f)=f(1)$ を再びもってこよう．この関数は C' 上で連続でない．実際 $f_n(x)=x^n$ とする．C' で $f_n\to 0$ であることがわかった．しかし，$A(f_n)=f_n(1)=1$ は $A(0)=0$ に収束しない．これに反し，関数 $A(f)=\int_0^1 f(x)dx$ は C' 上で連続である．なぜなら，f_n が f に平均収束するならば

$$\begin{aligned}|A(f_n)-A(f)|=\left|\int_0^1 f_n(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\right|&\leqslant\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx\\&=d'(f_n,f)\to 0\end{aligned}$$

が成立する．これで証明された．

3. 第 3 の 例

$0\leqslant x\leqslant 1$ で定義され，$0\leqslant x\leqslant 1$ で連続な導関数をもつ実数値関数 $f(x)$ の集合を D とする（これは $x=0$ に対しては右微係数を，$x=1$ に対しては左微係数をとるものとする）．$f\in D$ かつ $g\in D$ のとき，

$$\delta(f,g)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)-g'(x)|$$

とおこう．

距離についてのはじめの三つの性質はただちに証明される．三角不等式は関係

$$\begin{aligned}&|f(x)-h(x)|+|f'(x)-h'(x)|\\&\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|+|f'(x)-g'(x)|+|g'(x)-h'(x)|\\&\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)-g'(x)|\\&\quad+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|g(x)-h(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|g'(x)-h'(x)|=\delta(f,g)+\delta(g,h)\end{aligned}$$

から得られる．したがって D は距離空間である．

関数 $f_n\in D$ の列が関数 $f\in D$ に収束するということは，f_n が一様に f に収束し，かつ f_n' が一様に f' に収束するということになる［$\delta(f_n,f)$ の定義より］．

空間 D は完備である．なぜなら，(f_n) は D におけるコーシー列とすると，列 (f_n) と (f'_n) はコーシーの規準を満足するから，関数 f と g に一様に収束し，古典的な定理から $g=f'$ となる．したがって，f_n は D の意味で f に収束する．

任意の $f\in D$ に対して，$A(f)=f'\left(\frac{1}{2}\right)$ とおこう．すると A は D 上の連続関数である．[これに反し，D の関数列 (f_n) が D の一つの関数 f に一様収束するというだけならば，$A(f_n)$ は必ずしも $A(f)$ に収束しない．] この D 上の連続関数 $A(f)$ はシュヴァルツの超関数の理論で双極と呼ばれるものである．

4. 第 4 の 例

複素平面において，Δ を不等式 $|z|<1$ で定義された開円板とする．Δ で正則で，$\iint_\Delta|f(z)|d\sigma<+\infty$ ($d\sigma$ は Δ における面積元素を表わす) であるような関数 $f(z)$ の集合を H とする．

$f\in H$ と $g\in H$ に対して

$$d(f,g)=\iint_\Delta|f(z)-g(z)|d\sigma$$

とおこう．

前の例と同様に，d が距離であることが証明される．($\iint_\Delta|f|d\sigma<+\infty$ で $\iint_\Delta|g|d\sigma<+\infty$ であることから，$d(f,g)<+\infty$ であることがわかる．) したがって，H は距離空間であり H において定義される収束はまた平均収束と呼ばれる．第 2 の例では完備ではなかったが，H は完備であることがわかる．

まず，$f\in H$ のとき，$|\zeta|\leqslant a<1$ であるようなすべての複素数 ζ に対して

$$(1)\qquad |f(\zeta)|\leqslant\frac{1}{\pi(1-a)^2}\iint_\Delta|f(z)|d\sigma.$$

が成立することを示そう．

Γ_r と Δ_r をそれぞれ中心が ζ で半径 r の円および開円板とすると，これらは $r<1-a$ に対して Δ に含まれている．$z=\zeta+re^{i\theta}$ とおくと，

$$|2\pi i f(\zeta)|=\left|\int_{\Gamma_r}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}|f(z)|rd\theta=\int_0^{2\pi}|f(z)|d\theta$$

が成立する．これより

$$\iint_{\Delta}|f(z)|d\sigma \geqslant \iint_{\Delta_r}|f(z)|d\sigma = \int_0^r\int_0^{2\pi}|f(z)|\rho d\rho d\theta$$
$$\geqslant \int_0^r 2\pi|f(\zeta)|\rho d\rho = \pi r^2|f(\zeta)|.$$

これは任意の $r<1-a$ に対して成立し，よって (1) が得られた．

ここで (f_n) を H におけるコーシー列と仮定しよう．$0\leqslant a\leqslant 1$ であるような任意の数 a に対して，D_a を中心が O で半径 a の閉円板であるとする．(1)より，任意の $\zeta\in D_a$ に対して

$$d(f_m, f_n) \geqslant \pi(1-a)^2|f_m(\zeta)-f_n(\zeta)|$$

が成立する．したがって，f_n は任意の円板 D_a において，ヴァイエルシュトラスの定理により，Δ で正則な関数 f に一様収束する．さらに，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$m, n\geqslant N$ である m, n と，任意の $a<1$ に対して $\iint_{D_a}|f_m(z)-f_n(z)|d\sigma\leqslant\varepsilon$ が成立する．したがって，$n\geqslant N$ である n と任意の $a<1$ に対して $\iint_{D_a}|f(z)-f_n(z)|d\sigma\leqslant\varepsilon$ が成立する，よって $n\geqslant N$ である n に対して $\iint_{\Delta}|f(z)-f_n(z)|d\sigma\leqslant\varepsilon$ が成立する．これより，$d(f_n, f)\to 0$ である，すなわち f_n は空間 H において f に収束する．

5. 第 5 の 例

区間 $[0, 1]$ 上で定義され，実数値をとる関数 $f(x)$ のすべての集合を B とする．B 上での最も基本的な収束は各点での収束である，すなわちすべての $x\in[0, 1]$ に対して $f(x)$ が $g(x)$ に近づくとき f は g に収束するということである．ある距離に対応する収束が各点収束であるような距離を B 上に定義できないことを示そう．これによってトポロジーは距離空間の研究だけに限定されるべきでないことがわかるであろう．

連続関数の集合 C は B に含まれている．C のある関数列の各点収束の極限である関数 $f\in B$ の集合を C_1 とする．C_1 の関数は 1 階級の関数と呼ばれるものである．このような関数は連続な点を少なくとも一つはもつことが証明されるが，ここではそれを認めよう．もしも各点収束が一つの距離によって定義できるならば，C_1 は B における閉集合，すなわち B における C の閉包である．しかるに，C_1 に属さない関数 f に各点収束する C_1 の関数列 (f_n) を構成しよう．この構成はつぎの注意によってなされる．

a) 一点では 1 で，それ以外のすべての点で 0 である関数 $f\in B$ は C_1 に属する（たとえば，これはいくつかの一次関数をつないだ連続関数のある列の各点収束の極限である）．

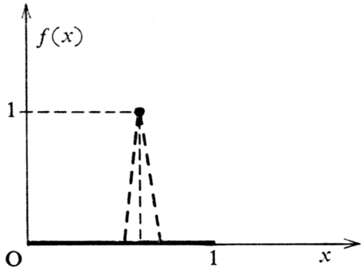


図　3

b)　有限個の点では1で，それ以外ではすべて0である関数 $f \in B$ は C_1 に属する(これは前の型の関数の有限個の和である).

c)　$(r_1, r_2, \cdots)$ を一列にならべた有理数の集合とする[1]. f_n を点 r_1, r_2, $\cdots$, r_n では1で，それ以外ではすべて0である関数とする．するとすべての n に対して $f_n \in C_1$ である.

d)　列 (f_n) はすべての無理数 x に対しては $f(x)=0$ で，すべての有理数 x に対しては $f(x)=1$ である関数 f に各点収束する．しかるにこの関数はどの点においても連続ではない．したがってそれは C_1 に属さない.

あとの講義で，収束の対応する概念が各点収束の概念であるような B 上の位相を定義できることがわかるだろう.

[1] これは0と1のあいだに含まれる有理数の集合は可算個であるから可能である.

一般位相の概念
位相空間の構成の仕方

ソルボンヌ大学教授

Ch. ピソー

極限と連続の概念を研究するためには，他の元の近くにある元とはどういうことかを定義すればよいということに導かれた．すでに，このような定義を与えることができるものとして距離 $d(x, x')$ の存在を知っている．数 $d(x_n, x)$ の列が0に収束するとき x_n は x に収束するという．したがってこの概念は実数の集合における極限の概念に利用される．しかしながら，いくつかの性質は実数に無関係なものであり，また一方，極限のある種の概念は，非常に単純なものでさえも，距離によって定義できない．この結果，元の《近傍》という，より一般的な定義を与えなければならなくなる．

たとえば，区間 $[a, b]$ で定義された関数 $u_i(x)$ の収束の普通の概念を考えよう．区間 $[a, b]$ のすべての x に対して，数 $u_i(x)$ が0に近づくとき u_i は0に収束するという．関数 $u_i(x)$ の集合にいかなる制限もつけなければ，関数 u_i に可算でない無限個の独立な条件を与えられる．0に収束する関数列 $\{u_i\}$ を定義する関数 u_i の集合に距離を定義できないことを示すのは容易である[1]．

x_0 での関数 $f(x)$ の連続性について定義する場合，つぎの方法で定義できることがわかった．すなわち，区間 $]f(x_0)-\eta, f(x_0)+\eta[$ の逆像は区間 $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ を含む．そこで x_0 を含む一つの開集合を含んでいる任意の集合を x_0 の《近傍》と呼ぶ．すると，$f(x_0)$ の近傍の逆像が x_0の近傍であるとき，$f(x)$ は x_0 で連続であるということになる．

よって開集合というものがこの近傍の定義で重要な要素になっている．距離空間 E の場合，つぎのようにして開集合 O を定義できる．O が開集合であるとは，O の任意の元 x_0 に対して，$d(x, x_0) < \rho$ を満たすすべての x が O に属するような数 $\rho > 0$ が存在する

---

1) 前の講義の第5の例，および，リュステルニク，ソボレフ著，柴岡泰光訳 "関数解析入門 1" 24ページ参照．［訳注］

ときである．三角不等式により，$d(x, x_0) < \rho$ を満たす x の集合はすべてまた開である．この開集合は距離の仲介を必要としないつぎの三つの性質を満足する．

O_1： 開集合の（有限個または無限個の）すべての合併は開である．

O_2： 開集合のすべての有限個の共通部分は開である．

O_3： E と $\varnothing$ は開である．

O_3 は E に対しては明らかであり，$\varnothing$ に対しては定義である．O_2 の場合，有限個という言葉は欠くことができないことを注意しよう．なぜなら，$\varepsilon_n \to 0$ である ε_n に対して開集合 $d(x, x_0) < \varepsilon_n$ をとるとき，それらが共通な点 $x_1 (\neq x_0)$ をもつならば，

$$d(x, x_0) < \varepsilon_n \text{ より } d(x_1, x_0) = 0 \text{ そして } x_1 = x_0$$

が成立するからである．

O_1 に関してはほとんど明らかである．

ある集合 E において，O_1，O_2，O_3 を満足する E の部分集合の集合を定義したとき，位相を定義した，あるいは E を位相集合にしたという．このときこれらの部分集合を E の《開集合》と呼ぶ．

例．　E と $\varnothing$ だけからなる族を考えよう．それは O_1，O_2，O_3 を満足する．これに伴う位相は粗い位相といわれる．

別の例．　E を全順序集合とする．$x < a$，$a < x < b$，または $x > b$ であるような元 x のすべての集合を《開区間》と呼ぼう．すると開集合は開区間の有限または無限個の合併である．

たとえば，単調関数 $f(x)$ を考えよう．任意の x に対して，右極限値 $f(x+0)$ と左極限値 $f(x-0)$ が存在することは知っている[1]．これにより各実数 x を $x+0$ と $x-0$ で表わされた二つの数量でおきかえて R から導かれる集合 E を考えることができる．この集合は R において $x < x'$ のとき，$x+0 < x'-0$ そして $x-0 < x+0$ ときめると全順序集合となる．したがって E において開集合，すなわち位相を定義できる．

開集合の概念から，近傍の概念を定義できる．元 x（またはより一般的には E の部分集合 A）を含む一つの開集合を含んでいる任意の集合を x（または A）の近傍と呼ぼう．

この定義から開集合はそれに含まれる各点の近傍であることがわかる．この逆もまた真である．すなわち，その各点の近傍であるような任意の集合 A は開集合である．実際，x

---

[1] 高木貞治著“解析概論”28ページ参照．［訳注］

が A の点ならば，xを含みかつ A に含まれるような一つの開集合 O_x が存在し，A は明らかにこのような O_x 全部の合併であるから A は開である．

空間 E の各点の近傍を知れば，E の開集合がすべてわかることになる．すなわち，同じ近傍をもつような一つの集合上の二つの位相は一致する．

近傍はつぎの性質を満足する．なおこれらをもとにして一つの位相を定義することに役立つものである．

V$_1$： x のすべての近傍は xを含む．

V$_2$： x の一つの近傍を含む任意の集合はまた x の近傍である．

V$_3$： x の有限個の近傍の共通部分はまた x の一つの近傍である．

V$_4$： V が x の近傍のとき，V に含まれる W で V が W の各点の近傍になっているような x の近傍 W が存在する．

性質 **V**$_4$ は x の十分近くの点に十分近いすべての点はそれ自身 x の近くの点であるということを示している．これは距離空間の三角不等式にもとづくものである．**V**$_4$ を示すには，W として V に含まれている x を含む開集合をとれば十分である．

これ以上拡張しなくとも，Eに相対的な開集合の補集合を導入することによって《閉集合》と呼ばれる集合の族が得られ，またそれによってEの位相が定義できることを注意しておく．

連続性，極限値

位相空間 E から位相空間 F への写像を f，u_0 を E の点とする．Fにおける $f(u_0)$の任意の近傍 W に対して，$f(V)$ が W の中に含まれるような E における u_0 の近傍 V が存在するとき，f は u_0 で連続であるという．すなわち，F における任意の近傍 W の逆像 $f^{-1}(W)$ が E における u_0 の近傍になっているときである．写像 f が E 上で連続であるとは，それが E のすべての点 u で連続であるときである．この場合，F の任意の開集合 O_F の逆像 $f^{-1}(O_F)$ が E の開集合 O_E であることが必要十分である．実際，O_F はそれに含まれる各点の近傍であるから，f が E 上で連続ならば，$f^{-1}(O_F)$ は E においてそれらの各点の近傍であり，よってこれは E の開集合である．逆に，E の任意の点 u と $f(u)$ の任意の近傍 W に対して，$f(u)$ を含みかつ W に含まれる開集合 O_F が存在する．そこで任意の O_F に対して $f^{-1}(O_F)=O_E$ ならば，u は O_E に含まれているから $f^{-1}(W)$ は O_E を含む，したがって $f^{-1}(W)$ は u の近傍であり，ゆえに f は連続である．

u の任意の近傍 V に対して，$n \geqslant N$ であるとき u_n が V に属するような整数 $N = N(V)$ が存在するとき，列 (u_n) は u に収束するという．一つの列が多くの極限値をもつような不都合な場合がある．たとえば粗い位相のときは，任意の u がどんな列 (u_n) の極限値にもなる．このことからつぎのような位相空間を区別することに導かれる．

分離空間.　その近傍がつぎの性質を満足するとき E は分離であるという．

S：<u>E の異なる二点は互いに交わらない近傍をもつ.</u>

例.　E を全順序集合とする．x, x' を $x < x'$ である異なる二元，a, b を $a < x < x' < b$ である元とする．

1°　$x < c < x'$ であるような c が存在するとき，$]a, c[$ と $]c, b[$ は互いに交わらない二つの開集合である．

2°　$x < c < x'$ であるような c が存在しないとき，$]a, x'[$ と $]x, b[$ は互いに交わらない．なぜならそこに共通な元 y が存在するならば，$y < x'$ と $y > x$ が成立するから $x < y < x'$ となるからである．

部分位相空間

E を位相空間，A を E の部分空間とする．E の開集合の A 上への交跡（その開集合と A との共通部分）は O_1，O_2，O_3 を満足するから，これによって A 上に位相が得られる．この位相によって A の任意の元 u を E における元 u に対応させる写像は連続である．

例.　R の区間 $]a, b[$ 上における位相，あるいは円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上，すなわち R^2 の部分集合上における位相．

逆の意味で，A の開集合の族は必ずしも E における開集合の族ではない．開集合の族であるためには A が E の開集合であることが必要十分である．実際，A は A の開集合であるから E において開でなければならない．逆に A が開集合ならば，E の開集合の A 上の交跡は E において開である．なぜならその交跡はそれに含まれる点の近傍だからである．

二つの位相空間の積

F と G を二つの位相空間，$u \in F$，$v \in G$ とするとき，対 (u, v) の集合が空間 $F \times G$ である．$F \times G$ の (u, v) に対して，F の u と G の v をそれぞれ対応させる射影 f と g は連続である．したがって，O_F が F の開集合ならば，積 $O_F \times G$ に等しい $f^{-1}(O_F)$ は $F \times G$ における開集合でなければならない．$F \times O_G$ についても同様である．また有限個の共通部分および合併についても同様である．そこで積 $O_F \times O_G$ を基礎集合と呼べ

ば，開集合はこれらの合併でなければならないことがわかる．それはこれらの合併が O_1, O_2, O_3 を満たすからである． なぜなら，O_1 と O_3 は明らかであり，O_2 については，$A = \cup O_F, B = \cup O_G$ とおくと，$\cup$ に関しての $\cap$ の分配律から，$A \cap B = \cup(O_F \cap O_G)$ が成立するからである．このとき空間 $F \times G$ は F と G の位相積と呼ばれる．つぎつぎにより多くの位相空間の積を定義できる．この積は結合的である．

連続性．　φ を位相空間 E から位相積 $F \times G$ への写像，$f = \mathrm{proj}_F\,\varphi$, $g = \mathrm{proj}_G\,\varphi$ とする， ここで proj_F は F 上への射影， proj_G は G 上への射影を表わすものであり，f は E から F への g は G への写像となっている．φ が連続ならば，f と g も連続である．逆に f と g が連続ならば，$f^{-1}(O_F)$ および $g^{-1}(O_G)$ はそれぞれ E, F の開集合であり，かつ $\varphi^{-1}(O_F \times O_G) = f^{-1}(O_F) \cap g^{-1}(O_G)$ は開で， 任意の 合併に対しても成立するから，$F \times G$ の任意の開集合に対して成立し，したがって φ は連続である．

$F \times G$ の $w_n = (u_n, v_n)$ が $F \times G$ の $w = (u, v)$ に収束するための 必要十分条件 は F で $u_n \to u$, G で $v_n \to v$ であることがわかる．

例．　R^2 において，$x \in]a, a'[$, $y \in]b, b'[$ である (x, y) の集合，すなわち《鋪石》の合併は開集合である．

F と G が分離であるときは，$F \times G$ もそうである．なぜならば，u と u' が F における異なる元ならば，$O_F \cap O'_F = \varnothing$ であるような $O_F \ni u$, $O'_F \ni u'$ が存在する，G における v と v' についても同様である．すると $(O_F \times O_G) \cap (O'_F \times O'_G) = \varnothing$で，$(O_F \times O_G)$ は (u, v) の近傍であり，それは (u', v') の近傍 $(O'_F \times O'_G)$ と交わらない．

逆に，$F \times G$ が分離であるならば，F と G もそうであることが容易に証明できる．

単純収束の空間．　E を $x \in [a, b]$ に対する実数値関数 $u(x)$ からなる空間とする．$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$|u(x_i) - u_0(x_i)| < \varepsilon$ であるような $u \in E$ の集合

$$\omega = \omega[u_0, x_1, \cdots, x_n, \varepsilon]$$

を基礎集合と呼び，これら基礎集合の有限または無限個の合併を《開集合》と呼ぼう．すると性質 O_1, O_2, O_3 は成立する． このようにして得られた位相は単純収束の位相である．

この位相は分離である．実際，$u_1 \neq u_2$ ならば，$|u_1(x_0) - u_2(x_0)| = 3\delta > 0$ であるような x_0 が少なくとも一つ存在する． このとき $\omega[u_1, x_0, \delta]$ と $\omega[u_2, x_0, \delta]$ は二つの交わらない開集合である．なぜならば $\omega[u_1, x_0, \delta]$ は $|u(x_0) - u_1(x_0)| < \delta$ であるような u の集合だからである．

コンパクト空間と局所コンパクト空間

ソルボンヌ大学教授

Ch. ピソー

関数空間の極限の概念によって，任意の無限族が少なくとも一つの極限関数をもつような空間に特別な重要性が与えられる．この性質はボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理によって表わされた実数の有界無限族の性質と同じものである．複素関数の理論におけるこの性質の重要性はモンテル氏の《正規族》の理論によって引き立っている．これによって一般位相空間論の仕上げに非常に寄与した変分学も記述できる．

しかしながらボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理は関数空間の中で現われる問題に最も良く適した形ではない．実数空間 R に対してのボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理に同値で，より好ましい性質はボレル=ルベーグの定理によって与えられ，そしてこれによって非常に有用な空間が定義できる．

コンパクト空間

つぎの二つの性質を満たす空間Eは**コンパクト**といわれる．

1° Eは分離空間である．

2° 開集合による E の任意の被覆から，これらの開集合の有限個からなる被覆がとれる．

したがって，R の任意の有界な区間はコンパクトであるが，R 全体はそうではない．

コンパクト空間の定義は，双対性によりつぎの形でも与えられる．Eが分離でありかつ有限部分族のすべてが空でない共通部分をもつような E の閉集合の族を Φ とするとき，Φ の閉集合全部の共通部分が空でないという性質をもつとき E はコンパクトである．こ

のあとの定義から，コンパクト空間において含包関係による全順序のつけられた閉集合 Φ_i からなる一つの族が得られるならば，これら Φ_i の全部の共通部分は空でないことがただちに証明される．任意のコンパクト空間 E に対してボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理が成立する．実際，(a_n) を E の元の無限族，A_n を $i \geqslant n$ である a_i の集合，$\overline{A}_n$ を A_n の閉包とすると，$\overline{A}_{n+1} \subset \overline{A}_n$ であるから，$\overline{A}_n$ 全部の共通部分は空ではなくかつそれらの元は a_n の集合の接触値である．

ここで逆，すなわちボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理で述べられた性質をもつ分離空間はコンパクト空間であるということは，一般には真ではないことに注意しよう．しかしながら距離空間に対しては真であることがわかるだろう．

コンパクト空間の閉部分空間はコンパクトであり，同様に分離空間の有限個の部分空間の合併および共通部分もコンパクトであることは容易にわかるであろう．コンパクト空間の有限個の積（位相空間の積の意味で）はコンパクトである．したがって n 次元輪 T^n は円周がコンパクトであるからコンパクトである．

連続性とコンパクト性

つぎの定理が成立する．

コンパクト空間 E から分離空間 F への連続写像 f による像 $f(E)$ はコンパクトである．

実際，1°　空間 $f(E)$ は分離空間 F の部分空間であるから分離である．

2°　空間 $f(E)$ の被覆を $f(E)$ の開集合 ω_i によるものとすると，これらの開集合 ω_i は F の開集合 Ω_i に対して $\omega_i = f(E) \cap \Omega_i$ であるようなものである．f が連続であるから集合 $f^{-1}(\omega_i) = f^{-1}(\Omega_i)$ は E の開集合であり，かつそれらは E の被覆である．E はコンパクトであるから，この被覆から有限被覆を選びだすことができ，そしてこれは写像 f によって，開集合 ω_i のうちから選ばれたものからなる $f(E)$ の有限被覆を与える．ゆえに $f(E)$ はコンパクトである．

特に，f が実数値関数のとき，すなわち $F = R$ のときこの定理が適用される．その結果，コンパクト空間 E の R への連続な像はコンパクトであるということになる．特に，このとき $f(E)$ は有界であり，E の特定の元の像がその上限と下限である．

コンパクトな距離空間

すべての距離空間は分離である．距離空間がコンパクトであるためには，ボレル=ルベ

ーグの定理が成立することが必要十分である．それがコンパクトならば，前でわかったように，ボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理が成立する．しかも，逆に，距離空間に対して，ボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理が成立するならばコンパクト性が得られる．

実際，距離空間 E の開集合 ω_i による被覆を考えよう．E の任意の元 x に対して，$\rho(x,i)\geqslant 0$ を ω_i に含まれる中心が x である最大の開球の半径とし，すべての開集合 ω_i に対して $\rho(x)=\sup\rho(x,i)$ とする．x と x' の距離を $d(x,x')$ で表わせば，

$$|\rho(x,i)-\rho(x',i)|\leqslant d(x,x')$$

が成立する．よって $|\rho(x)-\rho(x')|\leqslant d(x,x')$．この結果，$\rho(x)$ は E 上の連続関数である．E のすべての x に対して，x は少なくとも一つの ω_i に含まれるから $\rho(x)>0$ であり，したがってボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理により E 上での下限 $\rho=\inf\rho(x)$ は $\rho>0$ を満足することが容易にわかる．したがってすべての x に対して，$\rho(x,i_x)>\dfrac{\rho}{2}$ となるような添数 i_x が存在する．このとき x_1 は $\omega_1=\omega_{i_{x_1}}$ が E を被覆しないような元であるならば，ω_1 に含まれない元 x_2 をとる．同様な操作を続ける．列 x_1，x_2，… は接触値をもたないことが示される．なぜならこれらの二つの元どうしの距離は $\dfrac{\rho}{2}$ を越えているからである．したがって，E でボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理が成立するならば，この列は有限でありそして ω_i の族から E を被覆する有限部分族が選ばれた．

一 様 連 続

E を距離空間，f を E から距離空間 F への連続写像とする．E がコンパクトならば，写像 f は《一様連続》である．実際，E の任意の x と任意の $\varepsilon>0$ に対して，$d_E(x,y)<\eta_x$ ならば $d_F(f(x),f(y))<\varepsilon$ であるような $\eta_x>0$ を対応できる．しかるに $d_E(x,y)<\dfrac{1}{2}\eta_x$ が成立するような y の集合は E の開球 B_x であり，B_x の集合は E の被覆をなす．E がコンパクトならば，有限被覆 B_{x_i} が選べる．

このとき $\eta=\min\dfrac{1}{2}\eta_{x_i}$ とおく．E の元 x を考えるとそれは B_{x_i} の一つに含まれている，それを B_{x_1} とする．E の別の元を y とし，$d(x,y)<\eta$ であるものとすると，

$$d(y,x_1)\leqslant d(y,x)+d(x,x_1)<\eta+\frac{1}{2}\eta_{x_1}\leqslant\eta_{x_1},$$

よって y はまた B_{x_1} に含まれ

$$d_F(f(x),f(y))\leqslant d_F(f(x),f(x_1))+d_F(f(x_1),f(y))<2\varepsilon$$

が成立する．

連　結　性

距離空間Eが**鎖状連結**であるとは，Eの任意の二元 a, b と任意の $\varepsilon>0$ に対して，$d(a_i, a_{i+1})<\varepsilon$ であるような E の有限個の元（εに関係してもよい）の一つの鎖 $a=a_0$, $a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n=b$ を対応できるときである．したがって，$\boldsymbol{R}$ の有界閉区間は鎖状連結である．$\mathbf{Q}$ の有界閉区間についても同様である．

Eが鎖状連結でコンパクトな距離空間，fが距離空間 F 上への連続写像ならば，$f(E)$ はコンパクトであり，fは一様連続であるから $f(E)$ は鎖状連結である．

鎖状連結でコンパクトな距離空間は連結である，すなわち，それは交わらない二つの空でない閉集合に分割することができない．実際，これに反して，E' と E'' を互いに交わらない空ではない閉集合で $E=E'\cup E''$ とする．$d(x_0', x_0'')=0$ であるような $x_0'\in E'$, $x_0''\in E''$ が存在しなければ，$x'\in E'$, $x''\in E''$ に対して $\inf d(x', x'')\neq 0$ が成立する．したがって $x_0'=x_0''$ であり，よって E' と E'' は交わる．

特に，$\boldsymbol{R}$上のすべての鎖状連結なコンパクト空間は閉区間である．この結果，コンパクト距離空間 E 上の任意の実数値連続関数fは $\sup f(E)$ と $\inf f(E)$ との間のすべての値をとる．

局所コンパクト空間

空間 $\boldsymbol{R}$ はコンパクトではない．しかしながら，各点の近傍はコンパクトになっている．正確には，Eが分離でありかつ E のすべての点がコンパクトな近傍をもつとき E は**局所コンパクト**であるという．したがって，$\boldsymbol{R}$ は局所コンパクトである．

局所コンパクトな空間に，無限遠点といわれるただ一つの点をつけ加えることによって得られた空間がコンパクトであるようにすることができる．このために，その閉包がコンパクトである E の集合の E における補集合を考えよう．これらの補集合はつぎの性質を満たす集合の族 V をなす．すなわち，V の一つの集合を含む任意の集合は V に属し，また V の集合の任意の有限個の共通部分は V に属する．これは位相空間における一点の近傍を定義する性質の一部になっている．そこで族 V が ω の近傍の族になっていることを定義としてとることによって，つけ加える元ωを定義できる．すると集合 $E+\omega$ はコンパクトである，なぜならば，例えば $E+\omega$ の一つの被覆としては ω を含む一つの開集合 Ω を考えると，この開集合の補集合はコンパクトであるから有限個の開集合 Ω_i で被覆でき，

したがってこれらの開集合 Ω_i と Ω は $E+\omega$ の一つの有限被覆をなすからである.

完備距離空間

距離空間が**完備**であるとは，すべての《コーシー列》が収束するときである．実数の集合 $\boldsymbol{R}$ は完備であるが，有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ はそうではない．つぎの命題が成立する．

すべてのコンパクト距離空間は完備である.

実際，(a_n) をコーシー列とする．すなわち任意の $\varepsilon>0$ に対して，すべての $h\geqslant n$, $k\geqslant n$ に対して $d(a_h,a_k)<\varepsilon$ であるような n が対応できる．A_m を $i\geqslant m$ であるような a_i の集合，$\overline{A}_m$ を A_m の閉包とする．すると $\overline{A}_{m+1}\subset\overline{A}_m$ が成立する．a' と a'' が $\overline{A}_n$ の二つの元のとき，$h\geqslant n$, $k\geqslant n$ に対して，

$$d(a',a'')\leqslant d(a',a_h)+d(a_h,a_k)+d(a_k,a'')$$

が成立する．任意の $\varepsilon'>0$ に対して，$d(a',a_h)<\varepsilon'$ かつ $d(a_k,a'')<\varepsilon'$ であるような h と k を対応できる．したがって $d(a',a'')\leqslant d(a_h,a_k)\leqslant\varepsilon$, これは列 (a_n) がコーシー列だからである．A を $\overline{A}_n$ 全部の共通部分とする．空間はコンパクトであるから，A は空ではない．a と b を A の二つの元とすると，それはすべての $\overline{A}_n$ に属す．したがって $\varepsilon>0$ がなんであっても $d(a,b)\leqslant\varepsilon$, この結果 $d(a,b)=0$, $b=a$ であり A はただ一つの元 a からなる．したがってコーシー列はただ一つの接触値をもつ，すなわちそれは収束列である．

バナハ空間

すぐあとで体 K における絶対値の概念については定義する．$\alpha\in K$ に対して $|\alpha|$ で表わされる絶対値が定義されている体 K 上の線型空間を E とする．つぎの性質を満たす E から正の実数上への写像 $x\longrightarrow\|x\|$ を**ノルム**と呼ぶ．

1° $x\neq 0$ のとき $\|x\|>0$, および $\|0\|=0$

2° 任意の $\alpha\in K$ に対して $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

3° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

このとき空間 E は**ノルム線型空間**と呼ばれる．

このような空間は

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

とおくとき距離空間である．

体 K はいつでもそれ自身の上の線型空間と考えることができる．このとき $|\alpha|$ で表わし

た線型空間上のノルムを元 $\alpha \in K$ の**絶対値**という.

定義.　絶対値をもつ体 K 上の線型空間は，それにノルムが定義されておりかつ完備であるときバナハ空間と呼ぶ.

ノルム線型空間の完備化

前に述べた性質をもつが，しかし完備ではないすべての線型空間はいつでもバナハ空間 E に拡張することができる.

実際，$X = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ を E におけるコーシー列とする．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，すべての $h \geqslant n$, $k \geqslant n$ に対して $\|x_h - x_k\| < \varepsilon$ であるようなnを対応できる．$Y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots)$ を別のコーシー列とする．$\alpha \in K$ に対して

$$\alpha X = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n, \cdots)$$

および

$$X + Y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n, \cdots)$$

とおく．αX と $X + Y$ はまたコーシー列であることはただちにわかる．したがってコーシー列は K 上の新しい線型空間を形成する.

$$\|x_h\| = \|x_h - x_k + x_k\| \leqslant \|x_h - x_k\| + \|x_k\|$$

が成立するから，$h \geqslant n$, $k \geqslant n$ のとき $\|x_h\| - \|x_k\| \leqslant \|x_h - x_k\| < \varepsilon$ である．同様に，x_h と x_k をいれかえて,

$$\|x_k\| - \|x_h\| \leqslant \|x_k - x_h\| < \varepsilon$$

が成立する.

したがって，実数の列 $\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|, \cdots$ はコーシー列である．すなわちこれはある実数 $\geqslant 0$ に収束する.

$\|X\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ とおくと,

$$\|\alpha X\| = \lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = |\alpha| \|X\|$$

$$\|X + Y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$$

が成立する.

逆に，$\|X\| = 0$ より $X = 0 = (0, \cdots, 0, \cdots)$ は成立しない．したがって $\|X\|$ はノルムではない．実際，$\lim_{n\to\infty} \|Z_n\| = 0$ であるような列 $Z = (z_1, \cdots, z_n, \cdots)$ のすべての集合を ζ とする．これらの列はコーシー列であり，そして $Z \in \zeta$, $Z' \in \zeta$ のとき，$\alpha Z \in \zeta$ および $Z + Z' \in \zeta$ が成立する．すなわち，これらのすべての列に対して $\|Z\| = 0$ である.

$X' - X \in \zeta$ であるとき，$X' \backsim X$ とすると，この関係は同値関係である．ξ を X の同値類，η を Y の同値類とする．$\alpha\xi = (\alpha X$ の類)，$\xi + \eta = (X + Y$ の類) とおくと，類に対してこのように定義された演算とこれらの類の集合は線型空間 $\hat{E}$ を構成する．類 ζ は $\hat{E}$ の元 0 である．

$X' \backsim X$ のとき，$X' = X + Z$ が成立し，$\|Z\| = 0$ であるから $\|X'\| \leqslant \|X\|$，同様に $\|X\| \leqslant \|X'\|$，したがって $\|X'\| = \|X\|$ である．$\|\xi\| = \|X\| = \|X'\|$ とおくと，$\|\xi\|$ はノルムである．実際，性質 2° と 3° は容易に証明され，1° も同様である．なぜなら，$\|\xi\| = 0$ ならば，$\|X\| = 0$ が成立し，したがって $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ であり $X \in \zeta$，よって $\xi = \zeta$．

$x \in E$ のとき，$\hat{x} = [(x, x, \cdots, x, \cdots)$ の類$]$ とおくと，$\widehat{\alpha x} = \alpha\hat{x}$ かつ $\widehat{x+y} = x + \hat{y}$ であり，したがって E と $\hat{E}$ の部分空間の間に同型が存在する．そこでこの $\hat{E}$ の部分空間と E を同一視する．よって $\hat{E}$ は E を含むノルム線型空間である．

体 K は上の方法で線型空間 $\hat{K}$ になり，$\hat{K}$ 自身も体であることが示される．$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots)$ が K の絶対値に対するコーシー列ならば，その類 α は $\hat{K}$ の中にある．一方，このとき列 $(\alpha_1 x, \cdots, \alpha_n x, \cdots)$ は E のコーシー列であるから，その類は $\hat{E}$ に属する．それを $\alpha\hat{x}$ と表わそう．これより，$\hat{E}$ は $\hat{K}$ 上の線型空間であることが容易に導かれる．

線型空間 $\hat{E}$ は完備である．実際，$(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)$ を $\hat{E}$ のコーシー列とする．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$h \geqslant n,\ k \geqslant n \text{ に対して } \|\xi_h - \xi_k\| < \varepsilon$$

であるような n が存在する．$X_m = (x_{m,1}, \cdots, x_{m,p}, \cdots)$ に対して $\xi_m = (X_m$ の類) とすると，$p \geqslant N_m$ のとき

$$\|\xi_m - \hat{x}_{m\ p}\| = \lim_{q\to\infty} \|x_{m,q} - x_{m,p}\| \leqslant \varepsilon$$

が成立する．ξ_m に対して $y_m = x_{m,N_m}$ であるような元 $\hat{y}_m$ を対応させると $\|\xi_m - \hat{y}_m\| \leqslant \varepsilon$ が成立し，この結果 $h \geqslant n$，$k \geqslant n$ に対して

$$\|\hat{y}_h - \hat{y}_k\| \leqslant \|\hat{y}_h - \xi_h\| + \|\xi_h - \xi_k\| + \|\xi_k - y_k\| < 3\varepsilon$$

である．しかるに $\|\hat{y}_h - \hat{y}_k\| = \|y_h - y_k\|$ であるから，列 $Y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots)$ は E のコーシー列である．そこで $\eta = (Y$ の類) のとき，

$$\|\eta - \xi_m\| \leqslant \|\eta - \hat{y}_m\| + \|\hat{y}_m - \xi_m\|$$

が成立する．しかし $m \geqslant n$ のとき $\|\eta - \hat{y}_m\| = \lim_{p\to\infty} \|y_p - y_m\| \leqslant 3\varepsilon$ であり，また $\|y_m$

$-\xi_m\| \leqslant \varepsilon$ であるから，$m \geqslant n$ のとき $\|\eta - \xi_m\| \leqslant 4\varepsilon$ である．したがって $\xi_m \to \eta$ であり，空間 $\hat{E}$ は完備である．

応用． 有理数体 Q を考えよう．Qにおける可能なすべての絶対値をさがすと，一つは普通の絶対値があるし，もう一つはつぎの絶対値が得られる．$p \geqslant 2$ を固定した素数，$r = \dfrac{u}{v}$ を一つの有理数とする．このとき $\dfrac{u}{v}$ を $p^n \dfrac{u'}{v'}$ の形にすることができる．ここで u' と v' はpではもう割ることができないものであり，nは正，0または負の整数を表わしている．$|r|_p = \dfrac{1}{p^n}$ とおくと，これが絶対値であることが容易に証明される．普通の絶対値に関して Q を完備化して R が得られる．絶対値 $|r|_p$ に関して Q を完備化して新しい完備な体 R_p が定義でき，その体上で解析学を構成できる．その解析学では実数上の解析学では得ることが不可能な結果が得られる．

代数構造と位相構造の両立性
群と位相線型空間

ソルボンヌ大学教授

R. ゴドマン

この表題で扱われることがらは非常な広範囲にわたっている．たとえば，位相群，関数空間，…等を含む．ここでは位相線型空間のいくつかの性質を示して，その一面だけをかいまみることにしよう．

1. 位相線型空間の定義

ある体（ここでは実数体 $\boldsymbol{R}$ だけを用いるが，複素数体の場合も同様である）上で定義された線型空間（またはベクトル空間）E とはつぎのような空間であることを思い起こそう．E は加法で表わされた可換的な演算に関しては群をなし（E の元の対 x, y に対して E の元である和 $x+y$ が対応する），そして E 上に $\boldsymbol{R}$ の元との乗法が定義されている．すなわち，対 $x \in E$，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\lambda x \in E$ が対応でき，この演算は $\boldsymbol{R}$ の元について結合的で，かつ $\boldsymbol{R}$ における加法と E における加法に関して分配的であり，そして $1 \cdot x = x$ であるような空間である．

元 x は点またはベクトルと呼ばれる．幾何学的表現では，複素数の表現の場合と同じく，一つのベクトルを始点が O に位置したそのベクトルの終点と同一視できる．

ここでさらに E 上に位相が定義されていると仮定しよう．すなわち，E 上に開集合の族，閉集合の族，点の近傍のいずれかが定義されているか，あるいはまた，列の収束または関数の連続性の条件が特徴づけられていることである．

しかしいくつかの性質が存在できるためには，いくつかの関係が代数構造と導入された位相構造を両立させることが必要である．すなわち，**位相線型空間**はつぎの条件を満たす位相の与えられた線型空間である．

1)　関数 $x+y$ は x と y について連続である.

2) と 3)　関数 λx は λ と x について連続である. この連続性は R 上の通常の位相と E 上に導入された位相によって定義されたものである.

これは列の収束に関する条件によってつぎのように表現される. $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ が x に収束し $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ が y に収束するときは, x_n+y_n の列は $x+y$ に収束しなければならない. そして列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ が λ に収束するときは, 列 $\lambda_n x_n$ は λx に収束しなければならない.

定義で与えられた条件を E の開集合からも表わすことができる. この観点をこれから明確にしよう.

2. 開集合に関する条件から位相線型空間を定義する公理

a を E の与えられた元とし, E の各元 x に対して平行移動によって得られた元 $x+a$ を対応させる. x が E の部分集合 U に属する元であるとき, 点 $x+a$ の集合を $U+a$ で表わす. 写像 $x \rightharpoonup x+a$ (この逆は $x \rightharpoonup x-a$) は連続である必要がある. したがって U が開集合であるということは a がなんであっても $U+a$ が開であるということと同値である.

同様に, $\lambda \neq 0$ に対して, 写像 $x \rightharpoonup \lambda x$ は x について連続でなければならないから, 特に x が O の近傍に属する点であるときは, λx についても同様である.

したがってつぎのように表わそう.

公理 I.　E の開集合の族は任意のベクトルによる平行移動によって不変である. O の近傍の族は, 中心が O である任意の倍率の倍写像によって不変である.

この結果, E 上の位相を定義するには, 原点 O の近傍を特徴づけることで十分である. したがって原点に対して条件 1), 2), 3) が保証できればよい. しかし 3) はすでに示されており, 条件 1) と 2) が残されている.

関数 $x+y$ が原点で連続であるというのは, 任意の O の近傍 U に対して

$$x \in V,\ y \in W \Rightarrow x+y \in U$$

すなわち $V+W \subset U$ であるような O の二つの近傍 V と W が存在することである.

しかも V と W の共通部分を U' とすると, これは O の近傍であるから, この条件はつ

ぎの公理と同値であることがわかる．

公理 II．　O の任意の近傍 U に対して，$U'+U'\subset U$ であるような O の近傍 U' が存在する．

写像 $\lambda \rightharpoonup \lambda x_0$ と $(\lambda, x) \rightharpoonup \lambda x$ ($\lambda=0,\ x=0$ の点で) の連続を示すことが残っている．

このことを簡単にするために，集合 X と O を通る任意の直線との共通部分が中心が O の空でない区間であるとき，X は対称星形であると呼ぶことにしよう．すると，終わりの二つの条件はつぎのように表わすことができる．

公理 III．　O の任意の近傍の中に，対称星形の部分近傍が存在する．

すなわち，O の対称星形の近傍は O の近傍の基底を構成する．

3. 局所的に凸な位相線型空間

通常の位相をもった平面において，集合 A に属する任意の a, b に対して，線分 ab のすべての点が A に属すとき，集合 A は凸であるという．同様に，線分の解析的な定義から，実数体上の任意の線型空間において，部分集合 A が凸であるというのは，

$$\forall x, y\in A,\ \forall\lambda\in[0,1] \text{ に対して，} \lambda x+(1-\lambda)y\in A \text{ が成立する}$$

ことである．

位相線型空間はその原点の任意の近傍が，原点の一つの凸近傍を含むとき局所凸であるといわれる．この条件は平行移動と倍写像によって不変である．

通常の距離をもった空間 R^n は明らかにこの条件を満たす．なぜなら O の任意の近傍は一つの凸近傍である中心 O の球を含むからである．事実，特に解析学での位相線型空間はほとんどいつでも局所凸である．代数学では必ずしもそうではない．

4. ノルム空間

実数体上の位相線型空間上で定義された**半ノルム**とは，つぎの条件を満足する実数値関数 $p(x)$ である．

1) $p(x)$ は正または 0 の数である，

2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$,

3) $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$.

特に，$p(-x)=p(x)$ および $p(0)=0$ であることを注意しよう．

さらに，$p(x)$ は $x=0$ のときだけ零，すなわち

4）$p(x)=0 \Rightarrow x=0$

のとき，この関数は**ノルム**といわれ，

$$p(x)=\|x\|$$

と表わす．

一つのノルムの与えられた空間は**ノルム空間**といわれる．線型空間上のノルムの存在から，それに伴う位相を導くことができる．二点の差のノルム $d(x,y)=\|x-y\|$ をその二点の距離 $d(x,y)$ と呼ぶ．これは明らかに距離の公理を満足する数であり，これによって線型空間は距離空間になる．$d(x,a)<\rho$ を満たす x の集合を球と定義すると，これは開集合である．a の近傍は a を含む一つの球を含んでいる部分集合として定義される．

このようにして定義された位相が線型空間の構造と両立することを証明する必要がある．

$$\begin{aligned} d(x+y,x_0+y_0) &= \|(x+y)-(x_0+y_0)\| \\ &= \|(x-x_0)+(y-y_0)\| \leqslant \|x-x_0\|+\|y-y_0\| \end{aligned}$$

すなわち，

$$d(x+y,x_0+y_0) \leqslant d(x,x_0)+d(y,y_0)$$

である．

しかも

$$\left.\begin{matrix} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} d(x,x_0) \to 0 \\ d(y,y_0) \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(x+y,x_0+y_0) \to 0$$

したがって

$$\left.\begin{matrix} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{matrix}\right\} \text{ならば } x+y \to x_0+y_0.$$

同様に，$x \to x_0$ かつ $\lambda \to \lambda_0$ ならば，$\lambda x \to \lambda_0 x_0$ が成立する．

5. ノルム空間の例

明らかに，空間 R^n はノルム空間である．しかしここで導入した概念は関数空間，すなわち関数を元とする無限次元の空間に対して特に重要である．

第1の例．　実変数 t，たとえば $0 \leqslant t \leqslant 1$ に対して定義され，実数値をとりかつ有界な関数 $x(t)$ の集合 E．各関数 x に対して，その絶対値の上限が定まり，よって x の関数

$$K(x) = \sup_t |x(t)| < +\infty$$

が得られる．

$K(x)$ は明らかに正で，関数 x の集合 E に対するノルムである．実際，

$$K(x+y) = \sup_t |x(t)+y(t)| \leqslant \sup_t (|x(t)|+|y(t)|) \leqslant K(x)+K(y)$$

$$K(\lambda x) = \sup_t (|\lambda| \cdot |x(t)|) = |\lambda| K(x).$$

終わりに，$K(x)=0$ ならば，すべての t に対して $|x(t)|=0$ でなければならないからである．

このように定義したノルムによって，前に述べたように，E に伴う位相が導入される．すなわち，列 $x_n(t)$ の収束は条件 $d(x, x_n) \rightarrow 0$ によって定義される．

なお $d(x, x_n) = \|x - x_n\| = \sup_t |x(t) - x_n(t)|$ である．

ある関数の上界が ε よりも小さいということは，その関数がすべての t に対して ε よりも小さいということであるから，問題にしている収束は，$0 \leqslant t \leqslant 1$ を満たすすべての t に対して

$$\forall \varepsilon,\ \exists N\ ;\ n > N \text{ に対して } |x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

によって表わされる．

これは一様収束を特徴づけるものであることがわかる．

他の例．　前の空間の部分集合で，たとえば $[0, 1]$ 上での連続関数（それは有界であることはわかる）の集合，またはそのうちで一回微分可能，n 回，または無限回微分可能な関数の集合を考えることができる．

またノルムの定義をかえることもできる，たとえば，$[0, 1]$ 上での連続関数の集合において

$$\|x(t)\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt$$

をノルムにとることができる．これは明らかにノルムの公理を満足する．

6. 局所凸位相線型空間の構成

このような空間はまったくノルムがつけられないことが証明される．最も一般的に位相を得るためには，半ノルム $p_\alpha(x)$ の族から出発しなければならないことが示される．こ

こでαはパラメーターの族の元であり，無限個であってもよい．

これらの半ノルムの族から有限個の p_{α_1}，p_{α_2}，…，p_{α_n} をとりだし，それぞれに正数 ε_i を対応させ，つぎに原点の近傍，すなわち $p_{\alpha_i}(x)<\varepsilon_i$ によって定義された x の集合を対応させよう．この近傍を $B(p_{\alpha_i},\varepsilon_i)$ とする．最後に，これらの n 個の近傍 $(i=1,2,\cdots,n)$ の共通部分を A とする．

有限個のパラメーターαの各集合に対して，このようにして原点の近傍 A が対応する．これら A の集合 $\mathscr{A}$ がOの近傍の基本系と見なされるものである（すなわち集合 A の一つを含む E の任意の部分集合をOの近傍と呼ぶ）．これによってただ一つのノルムの場合に行なったことを一般化できる．

このようにして定義された位相によって E は局所凸になることを示そう．このためには A が凸であることを証明する必要があり，それには凸集合の共通部分は凸であるから，$B(p_{\alpha_i},\varepsilon_i)$ が凸であることが示されればよい．そこで $p_{\alpha_i}(x)<\varepsilon_i$ で $p_{\alpha_i}(y)<\varepsilon_i$ と仮定しよう．半ノルムの公理により，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$ に対して

$$p_{\alpha_i}[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant p_{\alpha_i}(\lambda x)+p_{\alpha_i}[(1-\lambda)y]\leqslant|\lambda|p_{\alpha_i}(x)+|1-\lambda|p_{\alpha_i}(y)$$
$$<\lambda\varepsilon_i+(1-\lambda)\varepsilon_i=\varepsilon_i$$

が成立する．

逆に，任意の局所凸位相線型空間 E 上に，いま示したような方法によって E の位相を構成することができる半ノルムの系が存在することが示される．

例． ただ一つの実変数の無限回微分可能な関数（多変数の関数の研究へ容易に拡張できる）．それらの超関数を定義するために，L. シュヴァルツはその関数に関係した t の一つの有限の値をこえる t の値に対して，それらの関数はさらに零であると仮定した．ここでは補足的なこの仮定はもうけない．

これらの関数の集合 E は線型空間であることは明らかである．この空間に位相を与えることが確かにできる．たとえば，t の各値に対して $x_n(t)$ が $x(t)$ に近づくとき，x_n は x に収束するということができるが，これには微分可能の仮定は使っていない．より強い位相を導入しよう．すなわち，つぎの条件を満たすとき $x_n(t)$ は $x(t)$ に収束するという．1）すべての有限区間 $[t_1,t_2]$ 上で $x_n(t)$ は $x(t)$ へ一様収束する．2）すべての導関数はこれと同じ条件を満足する，すなわち，すべての h に対して，有限の長さのすべての閉区間において $x_n^{(h)}(t)$ は $x^{(h)}(t)$ に一様収束する．

（導関数が収束するならば，かなり一般的にその関数は収束する，しかし逆は例外的で

あることを注意しよう．）

収束のこの定義を使って，無限個の半ノルム系を導入して位相が定義できる．

K を有限の長さの区間 $[t_1, t_2]$ とする．すなわちこれは R のコンパクト集合である．D を任意次数の微分の記号とすると，Dx は演算子 $x \underset{D}{\smile} x^{(h)} = Dx$, $\forall h$ の族である．

つぎのように K と D に関しての半ノルムを定義する．

$$p_{K,D}(x) = \sup_{t \in K} |Dx(t)| \qquad (K \text{ 上の } Dx \text{ の最大値}).$$

したがってここではパラメーター α の族は対 K, D の族である．これらの数は確かに半ノルムの公理を満たす．そしてこれから導かれる収束は

$$\forall K,\ \forall D,\ p_{K,D}(x_n - x_0) \to 0 \iff x_n^{(h)}(t) \to 0 \ (\text{一様に})$$

が成立するから，与えられた強い収束の条件を満足する．

ほかにも多くの例を与えることができる．

7. 局所凸位相線型空間の概念の重要性

歴史的スケッチ．　数学の理論は明確な問題にそれを利用する目的で発展してきた．紹介したばかりの理論は，数は少ないが非常に有力な定理を含んでいる．しかし少数であったがためにこの発見はおそかった（1920 年頃）．

バナハはまず第一にただ一つのノルムだけを考えた．完備なノルム位相線型空間をバナハ空間と呼ぶ（すなわちここではすべてのコーシー列は収束する）．1930 年頃には半ダースばかりであったが，いろいろな場合に適用される基本的な定理が得られた．15 年たらずの間に，有用な例で成立したものを有効な定理に選ぶことができ，そしてこれらの例に適用される定理をそろえることができた．バナハの著作（*Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932）はこの一段階をしるしたが，これはわずか 15 年ほどで，欠くことのできない無限個の半ノルムをもったシュヴァルツの無限回微分可能な空間のようなより一般的な集合の研究をその理論に含める必要にこたえるために，追い越されてしまった．J. ディユドネの論文（*Annales de l' E. N. S.*, 1940）で空間が局所凸であるという仮定を導入して，バナハの問題がふたたび扱われた．局所凸によって研究された場合は，バナハの述べたことがらに還元できない定理をうることができる（G. M. マッキー，J. ディユドネ，L. シュヴァルツの超関数の理論）．最後に，グロタンディクは重要な結果を得たから，バナハの真の後継者と見なされてよいであろう．

この理論は，その応用を目的とする有効なやり方で創造され豊かにされる理論と同じタイプのものであるかもしれない．

8. いくつかの定理の概要

ハーン=バナハの定理．　この定理は非常に注目に値する内容をもっているので，非専門家さえもこの定理の重要性を認めている．超限帰納法とツェルメロの公理を用いるその証明はここでは示さない．

準備．　一つの位相線型空間から他の位相線型空間上への連続線型写像．

位相線型空間 E から F への線型写像のうちで，E と F の位相に関して連続であるものを考えることができる．この写像は数多くの例で非常に重要である，たとえば，シュヴァルツの空間において，微分による写像 $x(t) \rightharpoonup x^{(h)}(t)$ は線型でありかつ与えられた収束に関して連続である．同様に，物理学のすべての微分作用素は，かなり容易に定義できる関数空間の連続線型写像である．積分作用素についても同様である．

基本的で特別な場合は，位相線型空間 E から実数の集合 R へのつぎのような連続写像 $x(t) \rightharpoonup u(x) \in R$ である．

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \text{ は } x \text{ と } y \text{ について連続,}$$

$$u(\lambda x) = \lambda u(x) \text{ は } x \text{ と } \lambda \text{ について連続である.}$$

$u(x)$ は E 上の線型形式と呼ばれる．

例．　E を $[0, 1]$ 上の連続実数値関数 $x(t)$ の集合とする．この区間の固定した一つの数 t_0 を選ぼう．各関数に t_0 におけるその値を対応させる写像 $x(t) \rightharpoonup x(t_0)$ は線型でかつ連続である．

同様に，E が同じ空間であるとき，写像 $x(t) \rightharpoonup \int_0^1 x(t)dt$ は線型であり，かつ平均値の定理により連続である．

より一般的に，今度は一つの連続実数値関数を選び，それを $f(t)$ とすると，写像 $x(t) \rightharpoonup \int_0^1 x(t)f(t)dt$ は線型でかつ連続である．

$x(t)$ の像がルベーグ=スティルチェスの積分である場合 $x(t) \underset{u}{\rightharpoonup} \int_0^1 x(t)d\mu(t)$ も同様である．ここで $\mu(t)$ は有界変動の関数である．これらの積分とその逆に関する定理によって，一様収束の位相に関して連続である連続関数の集合上の線型形式であるとするこの積分の現代的な定義が導かれる．

ハーン=バナハの定理は局所凸位相線型空間に関するものである．

この定理はこれらの空間上の連続な線型形式の存在と，正確にその決定条件さえも示しているものである．

F を E の部分線型空間とする（すなわち，加法の演算と実数との乗法の演算に対して安定な部分集合）．E 上に一つの位相が存在するときは，E における F の閉包（または接触集合）$\overline{F}$ を定義できる．これによってバナハの定理はつぎのように表わされる．

閉部分線型空間 $\overline{F}$ と $\overline{F}$ 上に位置しない一点 p が与えられているとき，集合 $\overline{F}$ のすべての点 x で零で，点 p で零でないような E 上の一つの連続な線型形式が存在する．

連続写像 $u(x)$ が F 上で零であるときは，$\overline{F}$ の点は F の点の極限であるから，それはまた $\overline{F}$ 上で零である．しかし $\overline{F}$ の外では全然わからない．定理の対象はこの $u(x)$ の存在である．

この講義は L. フェリックス嬢（パリ，ラ・フォンテーヌ街）によって編輯されたものである．

次元の概念について

ソルボンヌ大学教授

H. カルタン

1. *n* 次元の多様体

n《次元》の空間で最も知られている例は実数（または《ユークリッド》）空間 R^n で，その点は n 個の実数 x_1, …, x_n の系である．R^n の任意の超平面，すなわち一次方程式（必ずしも同次でなくともよい）$f(x)=0$ で定義された集合 H は，空間をそれぞれ $f(x)>0$ と $f(x)<0$ によって定義された半空間に分ける．さらに，異なる二点 x と y が任意に与えられると，それらを《分ける》一つの超平面 H がいつでも存在する．すなわち x は H によって定義された一方の半空間にあり y は他方の半空間にあるようなものである．H は空間 R^{n-1} に位相同型[1]であり，したがって《次元》は $n-1$ である．

空間 R^n によって，また n《次元》と呼ぶのが当然と思われる他の空間が見いだされる機会が与えられる．たとえば，S_n を空間 R^{n+1} において方程式 $(x_1)^2+\cdots+(x_{n+1})^2=1$ で定義された球面とすると，これは有界閉部分空間であり，したがってコンパクトである．さらに立体射影によってそれらの点から一点だけを除いた S_n と空間 R^n との間に位相同型が与えられる．したがって，S_n の各点は R^n に位相同型な開近傍をもつことがわかる．

また，（実）射影空間 P_n を考えると，その点は少なくとも一つが零でない $n+1$ 個の同次座標 z_0, …, z_n で定義されており，比例する二つの系は射影空間 P_n の同じ点を定

[1] 二つの位相空間の間に同相写像が存在するとき，その二つの空間は位相同型である．すなわちその写像によって開部分集合どうしが対応しかつ一対一対応である．このことから一方から他方の空間への（この対応によって定義された）写像が両連続であるという結果になる．

義すると約束してある．実をいえば，P_n を完全に定義するためには P_n の位相がなんであるかを正確にいう必要がある，しかしここでは詳細には立ち入らない．座標 z_i が零であるような P_n の点の集合は閉部分空間 H_i であり，それは P_{n-1} に位相同型である．H_0 はしばしば《無限遠における超平面》と呼ばれるものである．H_i の補集合 U_i は P_n の開集合で R^n に位相同型である（たとえば，U_0 は《有限の距離に》位置するといわれる P_n の点の集合である）．U_i の点は n 個の実数，すなわち商

$$z_0/z_i,\ \cdots,\ z_{i-1}/z_i,\ z_{i+1}/z_i,\ \cdots,\ z_n/z_i$$

によって座標が与えられる．したがって P_n はそれぞれが R^n に位相同型な $n+1$ 個の開集合の合併である．

一般的に，ハウスドルフの分離公理を満足し（すなわち，異なる点 x，y の任意の対に対して共通な点をもたない x の近傍と y の近傍が存在することである），そしてさらに V のすべての点は空間 R^n に位相同型な開近傍をもつという性質のあるすべての位相空間 V を n 次元多様体と呼ぶ．R^n 自身，S_n，P_n は n 次元多様体であることがわかる．

問題.　n 次元多様体 V と m 次元多様体 W は $n \neq m$ のとき，位相同型であることが可能であるか？　これが可能であれば，多様体の《次元》の概念は無意味なものとなるであろう．幸いに，これは不可能である，しかしこの不可能なことを証明するのは非常にむずかしい．

この問題をほんの少しだけ分析しよう．本質的には，$m \neq n$ のとき，R^n の開集合 U と R^m の開集合 U' との間に同相写像が存在するかどうかを知ることである（もちろん U と U' は空でないと仮定している）．位相同型であると仮定しよう．すると U から U' の上への連続写像 f と U' から U の上への連続写像 g が存在し，それらの合成写像 $g\circ f$ は U の恒等写像であり，$f\circ g$ は U' の恒等写像となるものである．さらに f と g が連続な偏微分をもつと仮定すれば，つぎのようにして上に述べた不可能であることが証明される．このとき U' の点の座標 y_j は U の点の座標 x_i の連続微分可能な関数 f_j である．すなわち

$$y_j = f_j(x_1, \cdots, x_n),$$

そして同様に $x_i = g_i(y_1, \cdots, y_m)$．微分

$$dy_j = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i, \qquad dx_i = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} dy_j,$$

を導入する．$\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ の行列は，各点 $x \in U$ において，R^n から R^m への線型写像を定義し，$\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}$ の行列は，対応する点 $y = f(x)$ において，R^m から R^n への線型写像を定義

する．合成関数の導関数の定理と，$f \circ g$ と $g \circ f$ が恒等写像であるということから，これら二つの行列（任意の次数であってよい）の積は単位行列であることが示される．すなわち，$x \in U$ で $y = f(x)$ のとき，一つは R^n から R^m への他方は R^m から R^n への線型写像でお互いに逆であるものが得られ，これによって R^m と R^n は，線型空間として，同型であることが証明される．しかるに，代数学の定理により R^n の基底ベククトルの元の数 n は R^m の基底の元の数 m に等しいことになり，$n \neq m$ という仮定に反する．

連続微分可能な同相写像に関しての次元の不変性を証明した．そのためには線型空間の《次元》の不変性を利用し，そのとき《次元》という言葉は純代数的な意味（基底ベクトルの元の数）で使った．

任意の同相写像（必ずしも微分可能でなくともよい）に関しての R^n の次元の不変性を証明するためには，非常にむずかしいことが多い．最初の証明は1911年にブロウエルによってなされた．ここでは，それを述べることもその考え方を与えることさえも問題にはしない．それは単体近似の概念に基づいており，また《ホモロジー》(L. シュヴァルツの後の講義を参照）の概念と密接に関連している．

次元の不変性の別の証明はルベーグによって考えられた着想[1]に基づいており，それはまたホモロジーと関係がある．線分 $I = [0, 1]$ 自身の n 個の積である n 次元立方体 I^n を考えよう．その立方体を閉集合によって敷石を敷くように被覆して（$n = 2$ の場合の図1を見よ），この立方体の各点が高々 $n + 1$ 個のこのような閉集合に属すようにでき，これ

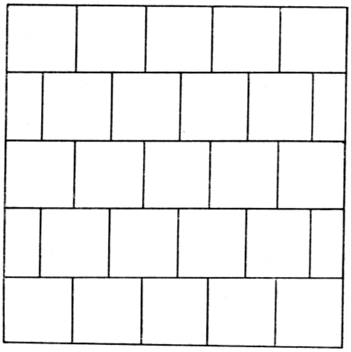


図　1

[1] ルベーグはグヴュ地方の小さな村のある家でレンガの壁を作っているとき，次元の持徴づけのこの着想を得たといわれている．

は任意に小さな直径の集合で可能である．さらに，十分小さな閉集合による I^n のどんな被覆に対しても，いつでもその被覆の少なくとも $n+1$ 個の集合に属すような立方体の点が少なくとも一つ存在することが示される．したがって数 n は空間 I^n の純位相的な性質を表わしている．これによって $m \neq n$ に対しての R^n の開集合から R^m の開集合の上への同相写像の不可能性が容易に導かれる．ここでルベーグの結論の正確な内容を与えよう．立方体 I^n の一組の対辺にけっして同時には交わらないような閉集合 F_i によって I^n が被覆されるならば，$n+1$ 個の F_i に共通な点が存在する．

2. 次元の理論に対する公理

前に考察したものよりもより一般的な空間の次元を問題にすることができるようにしたい．たとえば，R^n の部分空間 A を考えよう．考えを固定するためにこれを閉集合とする．それに位相的に不変である次元，したがって B が A に位相同型であるというただ一つの条件のもとで A を R^n の別の部分空間 B でおきかえてもかわらない次元を与えることができるか？

次元の理論では，まず第一に次元（それは整数であり，0または無限大になることがあってもよい）を定義しようとする位相空間の類 $\mathscr{C}$ を正確に固定する必要がある．この類 $\mathscr{C}$ はハウスドルフの分離公理を満たす空間だけを含み，かつすべての多面体を含むと仮定しよう．そこでまず，多面体と呼ばれるものは何かを思い起こそう．そもそも，p-単体（または p 次元の単体）とはいかなるものであるか．空間 R^n の中で $p+1$ 個の点 x_i $(i=0, \cdots, p)$ の列をとろう，それらを含むいかなる次元 $<p$ の平面も存在しないとする（これは $n \geqslant p$ ならばいつでも可能である）．これらの点に正（または零）の質量を与えたときの重心の全体はこれら $p+1$ 個の点を含む最小の凸集合になり，これを頂点 $x_0, \cdots, x_p$ の p-単体と呼ぶ．この各点はただ一通りに $\sum_i \lambda_i x_i$ と表わされる，ここで $\lambda_i \geqslant 0$ は $\sum_i \lambda_i = 1$ を満たす実数である．同じ次元 p の二つの単体は位相同型である．$p=0$ のときは点，$p=1$ のときは線分，$p=2$ のときは三角形，$p=3$ のときは四面体であることがわかる．また，多面体とはつぎのような方法で組合わされた（いろいろな次元の）単体に位相同型な有限個の閉部分空間で被覆できる空間である．単体の組合せ方はその被覆の二つの単体が交わるときは，その共通部分はそれぞれの単体の《面》で交わらなければならないものである（p-単体の面とはそれらの頂点のうちのいくつかから作られた重心の

全体，すなわちそれは次元が $0, 1, \cdots, p-1$ の単体である）．

類 $\mathscr{C}$ にもどろう．これがすべての多面体を含むようにしよう，さらに類 $\mathscr{C}$ の空間 X の閉部分空間に位相同型なすべての空間はまたこの類 $\mathscr{C}$ の中に含まれるようにしよう．したがってこのような類は多面体の閉部分空間すべてを含むから当然かなり大きなものとなる．

類 $\mathscr{C}$ の例． 1） コンパクト空間の類 $\mathscr{C}_1$（空間 X がコンパクトであるというのは，それがハウスドルフの公理を満足し，さらにボレル=ルベーグの性質をもつときであることを思い起こそう．ボレル=ルベーグの性質とは開集合 U_i の族による X の任意の被覆に対して，X を被覆するこれら U_i のうち有限個のものが存在することである）．

2） 局所コンパクト空間の類 $\mathscr{C}_2$（X が局所コンパクトであるとは，それがハウスドルフの公理を満足し，そしてすべての点が少なくとも一つのコンパクトな近傍をもつときである）．空間 R^n は類 $\mathscr{C}_2$ に属すが類 $\mathscr{C}_1$ には属さない．

3） 可算型の距離のつく空間の類 $\mathscr{C}_3$． これは明らかに任意の n について R^n のすべての部分空間を含んでいる．空間 X が距離がつくとは，X の位相が距離によって，またはさらに精密にいえば点 x, y の各対に対してつぎのような数 $d(x, y) \geqslant 0$ を対応させる《計量》によって定義されるときである．

$$x = y \text{ のときにかぎって } d(x, y) = 0$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \qquad (\text{《三角不等式》}).$$

このような距離のつく空間 X が《可算型》であるとは，X でいたるところ密な X の点の可算個の列 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ が存在するときである（すなわち空でない任意の開集合がこれらの点の少なくとも一つを含むことである）．空間 R^n は類 $\mathscr{C}_3$ の中にある．なぜならば有理数の座標をもった点の可算集合はいたるところ密だからである．類 $\mathscr{C}_3$ の一つの空間 X の任意の部分空間 A は，A が X で閉でなくとも $\mathscr{C}_3$ の中にある．

4） 正規空間の類 $\mathscr{C}_4$． 空間 X が正規であるというのは，それがハウスドルフの公理を満足し，かつ A と B が交わらない閉部分集合のときは，いつでも A 上では 0 で B 上では 1 になるような X 上の実数値連続関数が存在するときである． 正規空間のすべての閉部分空間は正規である．

コンパクト空間は正規であり（すなわち，$\mathscr{C}_4$ は $\mathscr{C}_1$ を含む），そして距離のつくすべての空間は正規である（したがって $\mathscr{C}_4$ は $\mathscr{C}_3$ を含む）ことが証明される．

これらの各類に対して，次元の理論が得られる．一般的には，次元の理論としては何を必要とするか．対象とする類 $\mathscr{C}$ の任意の空間 X に対して，つぎの条件を満足するような X の次元と呼ばれる一つの整数 $\dim X$ が対応されていると仮定する．

（Ⅰ）$\dim X \geqslant -1$，$\dim X$ は無限大であってもよく，X が空でないときにかぎって $\dim X \geqslant 0$ である．

（Ⅱ）X が X' に位相同型であるときは，$\dim X = \dim X'$．

（Ⅲ）A が X の閉部分空間のときは，$\dim A \leqslant \dim X$．

（Ⅳ）X が二つの閉部分空間 A_1 と A_2 の合併であるときは，$\dim X = \sup(\dim A_1, \dim A_2)$．

（Ⅳ′; これは随意である）　X が閉部分空間 A_i の可算列の合併のときは，$\dim X = \sup(\dim A_i)$．

（Ⅴ）立方体 I^n の次元は n である．

そこで，R^n が類 $\mathscr{C}$ の中にあれば，R^n の次元は n である．実際，（Ⅲ）より $\dim R^n \geqslant \dim I^n$，よって（Ⅴ）より $\dim R^n \geqslant n$，一方 R^n は閉立方体の可算個の合併であるから，（Ⅳ′）より $\dim R^n \leqslant n$ である．

注意．　《f が X から Y への連続写像ならば，像 $f(X)$ の次元はせいぜい $\dim X$ に等しい》を公理としないように気をつけなければならない．実際，《ペアノ曲線》は線分 I から正方形 I^2 上への連続写像であり，それで公理（Ⅴ）と矛盾するからである．（ペアノ曲線については附録を参照．）

前の公理のほかに，かなり性質の違った別のものがある．まずつぎの概念を導入しよう．空間 X の交わらない二つの閉部分集合 A と B が与えられているとき，$X-C$ が A と B をそれぞれ含む交わらない二つの開集合の合併であるとき，閉部分集合 C は A と B を分離するという．新しい公理は

公理（A）．　交わらない二つの閉部分集合がいつでも次元 $\leqslant n-1$ の閉部分空間によって分離されるような空間 X であるときは，$\dim X \leqslant n$．

3. メンガー=ウリソンの定理

類 $\mathscr{C}$ として可算型で距離のつく空間の類 $\mathscr{C}_3$ をとり，公理（A）だけでなくその逆，すなわち $\dim X \leqslant n$ のときは，X の交わらない二つの閉集合はいつでも次元 $\leqslant n-1$ の

閉部分空間によって分離することができることをつけ加える．このように強められた公理と公理（I）によって完全に次元が決定される．より正確には，整数 n についての帰納法によって，次元 $\leqslant n$ の空間 X はいかなるものであるか定義できる，それは定義により，交わらない任意の二つの閉部分集合が与えられるとそれらは次元 $\leqslant n-1$ の閉部分空間によって分離できるような空間である．公理（I）により，次元 $\leqslant -1$ の空間が何かがわかれば（空である空間が一つだけ存在する），つぎつぎに次元 $\leqslant 0$ の空間，次元 $\leqslant 1$ の空間，… 等の定義が得られる．空間 X の次元はこのとき $\dim X \leqslant n$ であるような整数 n の最小値に等しいか，またはこのような整数 n が存在しないときは無限大である．

次元のこの定義では，（II）から（V）までの条件は考慮しなかった．実際，それらは満足されるからである［（IV′）も含めて］．ここではそれらは定理であり，証明するためには（かなりむずかしいものもあるが），X が可算型で距離のつく空間であるということを利用しなければならない．さらに，公理（III）は X の任意の部分空間 A に対して，それが閉でなくとも成立する．

次元のこの理論に関するすべての事柄について，読者はフルヴィッツ=ウオルマンの労作（*Dimension theory*, Princeton, 1941），または Albin Michel 社のファヴァドの小冊を参考にできる[1]．

類 $\mathscr{C}_3$ に対して，次元の他の理論が得られたとしても，この新しい理論での空間 X の次元はメンガー=ウリソンの理論でのその次元とせいぜい等しくなるであろう．証明は公理（A）を用いて帰納法による．

零次元の空間とは何かを説明することは有意義なことである．X が 0 次元であるのは X のすべての点がその境界[2] が空であるような近傍の基本系をもつときにかぎることが証明される．しかるに，その境界が空である集合は同時に開であり閉である集合にほかならない．0 次元空間の例：D を線分 I の無理点からなる部分空間とすると，D は 0 次元である．なぜなら D のすべての点 x は開でかつ閉である近傍系をもつからである，すなわちその近傍は x を含みその両端が有理数である I の線分の D 上への交跡である．無限個の

---

1) 邦書では，森田紀一著“次元論”．［訳注］

2) 位相空間 X の部分集合 A に対して，つぎの二つの集合を対応できることを思い起こそう．A を含む最小の閉集合である接触集合（または閉包）$\overline{A}$ と，A の中に含まれる最大の開集合である内包 $\mathring{A}$，このとき差集合 $\overline{A}-\mathring{A}$ が A の**境界**と呼ばれる，これはまた A の補集合の境界にもなっている閉集合である．A の境界が空であるとは，$\mathring{A}=\overline{A}$ であることである．このためには A が開でかつ同時に閉であることが十分である．

点からなる0次元のコンパクト空間が存在する，たとえばそれはつぎのような空間 E である．その点は0と1の数字の無限列で，その位相はつぎのようなものである．これらの列からなる $s_1, \cdots, s_k, \cdots$ の極限が列 (s) であるためには，任意の整数 n に対して，ある整数 $k(n)$ より大きいすべての k に対して列 (s_k) がはじめの n 桁にいたるまで (s) と同じ数字をもつことが必要十分である．この空間 E はコンパクトで0次元である(そのはじめの n 個の数字が与えられたものに等しいようなすべての列は E において同時に開でかつ閉である集合をなすことを注意して証明できる)．この空間 E から線分 $I=[0,1]$ 上への連続写像 f が存在する．f は数0と1からなる各列 $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$ に対して，実数 $\sum_k \frac{a_k}{2^k}$（この級数は収束する)，すなわちある桁からは全部1である場合を除いて，この数字の系からなる二進法で表わされた数を対応させるものである．除外した場合（たとえば 0101111…)，その列によって定義された数は列 0110000… によって定義された数と等しいとする．したがって，E から I の上への連続写像 f は一対一ではない．

4. アレクサンドロフ=チェクの理論

これはルベーグの着想（前の第2節）にもとづいており，それを適当に修正したものである．類 $\mathscr{C}$ として類 $\mathscr{C}_4$ をとる．有限個の開集合 U_i による空間 X の一つの被覆が与えらているとき，X の各点がその被覆の高々 $n+1$ 個の集合に属するならば，この被覆の次元は $\leqslant n$ であると定める．一方，各 V_j が少なくとも一つの集合 U_i に含まれているとき，開集合 V_j による被覆は U_i による被覆よりも細かいという．アレクサンドロフ=チェクの理論ではつぎの定義を与える．

有限個の開集合による X の任意の被覆に対して，また有限個の開集合よりなり，その次元が $\leqslant n$ であるようなより細かい被覆が存在するとき，正規空間 X の次元は $\leqslant n$ である．

次元のこの理論は（I）から（V）までのすべての公理［(IV′) は場合によっては除かれる］を満足し，公理（A）も満足することが示される．

類 $\mathscr{C}_4$ が類 $\mathscr{C}_3$ を含むことはすでに述べた．類 $\mathscr{C}_3$ 上で，アレクサンドロフ=チェクの意味での次元はメンガー=ウリソンの意味での次元に等しいということは非常に注目に値する．

他方，類 $\mathscr{C}_4$ はコンパクト空間の類 $\mathscr{C}_1$ を含むから，アレクサンドロフ=チェクの理論によってコンパクト空間の次元の理論が与えられる（メンガー=ウリソンの理論は距離のつくコンパクト空間の次元だけしか与えない）．コンパクト空間の次元のこの理論は（IV′）も含めてすべての公理を満足する．

今度はコンパクト空間の次元の別の特徴づけを与えよう．その次元が明らかであるコンパクト空間の類は多面体の集合である．実際，一つの多面体の次元は（I）から（V）までの公理によって，それを構成している単体の最大次元であることは明らかである．これによりコンパクト空間の次元の概念は多面体の次元の概念から得ることができる．簡単にするために，対象とするコンパクト空間 X の位相は距離によって定義されていると仮定しよう．X から多面体 P への連続写像は，P の各点の逆像の直径が $\leqslant \varepsilon$（ここで ε は数 >0 を表わす）の X の集合であるときは，定義により[1]，ε-写像となるであろう．つぎの定理が証明できる．コンパクト空間 X の次元が $\leqslant n$ であるためには，任意の $\varepsilon>0$ に対して次元 $\leqslant n$ の多面体 P と X から P への ε-写像が存在することが必要十分である．

ここでは，この規準の写像があるとする．二つの多面体 P と Q の積は単体に分割でき，そしてこのように分割された $P\times Q$ の次元が P と Q の次元の和であることはほとんど明らかである．この結果，X と Y が二つのコンパクト空間であるならば

$$\dim(X\times Y)\leqslant \dim X+\dim Y \tag{1}$$

が成立する．あいにく，いつでも等号が成立するとはかぎらない．ポントリャーギンは1930年に，2次元の二つのコンパクト空間でその積の次元が3である例を与えた．

不等式（1）はアレクサンドロフ=チェクの理論でも同様に成立する．実際，X と Y が類 $\mathscr{C}_4$ の中にあるときは $\dim\widetilde{X}=\dim X$，$\dim\widetilde{Y}=\dim Y$ であるように，コンパクト空間 $\widetilde{X}$ と $\widetilde{Y}$ へ拡張することができ，このとき $X\times Y$ は $\widetilde{X}\times\widetilde{Y}$ へ拡張される．そして

$$\dim(X\times Y)\leqslant\dim(\widetilde{X}\times\widetilde{Y})\leqslant\dim\widetilde{X}+\dim\widetilde{Y}=\dim X+\dim Y$$

が成立するし，これで（1）が証明される．

5. 局所コンパクト空間の次元

この理論では，局所コンパクト空間の次元を X のコンパクト部分空間の次元の上限と

---

[1] 距離空間 R から他の空間 R' への連続写像が ε-写像であるとは，R' の各点に対する逆像の直径がつねに $\leqslant\varepsilon$ であるときである．［訳注］

して定義する（コンパクト空間の次元は第4節で述べたように定義されている）．このようにして類 $\mathscr{C}_2$ に対する次元の理論が得られる．それは（I）から（V）までの［(IV′) も含めて］すべての公理を満たし，さらに公理（A）および（1）の関係も満足する．

したがって，本質的に二つの理論，一つは類 $\mathscr{C}_3$ の空間に対する次元の理論（第3節参照）と局所コンパクト空間のすべての類 $\mathscr{C}_2$ に対する今述べた理論が得られる．共通な類 $\mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3$ 上でこれら二つの理論が一致することを知るのはおもしろいことである．すなわち，局所コンパクト空間 X が類 $\mathscr{C}_3$ に属す（そのためには X が距離のつくコンパクト部分空間の可算個の列の合併であることが必要十分である）ときは，メンガー=ウリソンの意味での X の次元は X に含まれるコンパクト部分空間の次元の上限に等しい．これはメンガー=ウリソンの次元が公理（IV′）を満足することに原因がある．

前の二つの理論のいずれにおいても，次元の概念は局所的な性質をもっている，すなわち，$\dim X \leqslant n$ であるためには各点が次元 $\leqslant n$ の閉近傍をもつことが必要十分である．

6. 空間 R^n の部分空間

X を R^n の部分空間とする，したがって X は類 $\mathscr{C}_3$ の中にある．X が R^n の空でない一つの開集合を含むときは，$\dim X = n$ であることは明らかである．この逆が証明できる．すなわち R^n の部分空間 X の次元がちょうど n ならば，X は R^n の空でない一つの開集合を含む．X がコンパクトである特別の場合，このことは容易に了解される．実際，X が内点をもたないと仮定しよう．多面体 $P \subset R^n$ をとり，それを X を含み直径が $\leqslant \varepsilon$ である単体からなるものとする．P の各 n-単体の内包に対して X に属さない一点を選び，この点からその単体の境界上へ，その単体の中に位置した X の部分集合を射影しよう．P のすべての n-単体に対してこの操作を続けて，X からその次元が $\leqslant n-1$ である P の単体の合併 P' への連続写像が得られるが，これは X からその次元が $\leqslant n-1$ である多面体への ε-写像である．これで $\dim X \leqslant n-1$ が導かれた．

実数空間 R^q の（閉）部分空間（したがって立方体 I^q の部分空間としても同様である）として実現できるコンパクト空間はどのようなものであるか．このような空間は明らかに距離のつく空間でなければならない．逆に，つぎの定理（メンガー=ネーベリング）が成り立つ．すなわち X が n 次元の距離のつくコンパクト空間のとき，X を $2n+1$ 次元の立方体 I^{2n+1} の閉部分空間として実現することが可能である．これに反して，立方体 I^{2n}

の部分空間として実現できないような n 次元の距離のつくコンパクト空間が存在する（たとえば，$2n+2$ 次元の単体の n 次元の面の合併）．

7. 球面 S_n への写像

X をコンパクト空間，A を X の閉部分空間とする．A から空間 R^n へのすべての連続写像は X 全体から R^n への連続写像に拡張できる（これは X が正規であるときにも同様に成立する）．しかし球面 S_n への写像を考えるときは，もはやこれは成立しない．たとえば，B_{n+1} を $n+1$ 次元球とする．すなわち原点からの距離が $\leqslant 1$ である R^{n+1} の点の集合である（S_n は B_{n+1} の境界である）．f を S_n の恒等写像とするとき，f は B_{n+1} から S_n への連続写像に拡張できないことが証明される．

コンパクト空間の次元のつぎの特徴づけが成立する．$\dim X \leqslant n$ であるためには，任意の閉部分空間 $A \subset X$ と A から S_n への連続写像 f に対して，f の X から S_n への連続写像への拡張が存在することが必要十分である．

同様な特徴づけがメンガー=ウリソンの次元に対しても成り立つ（X はこのとき可算型で距離がつく空間である）．

これによりつぎの性質が導かれる．Y が局所コンパクト空間 X の閉部分空間ならば，

$$\dim X \leqslant \sup(\dim Y, \dim(X-Y)) \tag{2}$$

が成立する．実際，同じ不等式がメンガー=ウリソンの理論でも同様に成立する．なぜならそのとき開集合 $X-Y$ は閉集合の可算列の合併だからである．

8. 可分部分空間

空間 X が空でなくかつ交わらない二つの開集合の合併ではないとき X は連結であるといわれる．連結な空間 X から閉部分集合 A をとりさるとき，残りの空間 $X-A$ が連結でないことがある（例．X を空間 R^n，A を超平面とする）．しかしながら，X が n 次元の連結多様体で，A が次元 $\leqslant n-2$ の閉部分空間ならば，空間 $X-A$ は連結であることが示される（たとえば，一点をとりさった平面は連結である）．A が $n-1$ 次元の場合，より正確には，A が位相空間として $n-1$ 次元多様体である場合はどんなことがいえるか．一般化されたジョルダン=ブロウエルの定理を述べよう，もちろんここでは証明はし

ない．X を n 次元の《向きづけ可能》な，連結でかつ《単連結》(これはすべての閉立方体が一点に連続変形できることを意味する）な多様体であるとする．$n-1$ 次元の（連結であってもそうでなくともよい)一つの多様体が X の中の閉部分集合として埋め込まれるならば，$X-A$ の連結成分の数は A の連結成分の数に1を加えた数に等しい．さらに，A の各連結成分は必ず《向きづけ可能》である．これはとりわけ X が空間 R^n の場合に適用できる．

9. k 次元測度との関係

X を可算型で距離のつく空間とする．X 上に一つの距離を選んだと仮定する．このとき，各整数 n に対して，X_i による X の可算個の被覆すべてに関しての和 $\sum_i d(X_i)^n$ の下限を $m_n(X)$ とする，ここで $d(X_i)$ は与えられた距離で計算した X_i の《直径》を表わす．X がコンパクトのときは，有限被覆だけを考えればよい．このときつぎのことが示される．$m_{n+1}(X)=0$ ならば $\dim X \leqslant n$ である．一種の逆が成立する．$\dim X \leqslant n$ のときは，$m_{n+1}(X)=0$ となるような X 上の距離が存在する．立方体の距離によって導入された距離を適当にとることによって，X を I^{2n+1} の部分空間としての実現を見いだすことさえもできる．

たとえば，X としてその次元が1である線分 I をとり，距離としてはその線分の二点間の通常の距離をとると，I をその距離の平方の和が任意に小さいような有限個の線分で被覆できることは明らかである．

結　　論

やむをえずいそがざるをえなかったこの概説によって，トポロジーにおいて，《次元》の概念に関連したさまざまの疑問点と問題点についての何らかの考えを持たれたことを期待する．

付録．ペアノ曲線

直角二等辺三角形 T を考え，s_0，s_1 を鋭角の頂点とする．線分 $I=[0,1]$ から T の上への連続写像 g で，$g(0)=s_0$，$g(1)=s_1$ であるようなものが定義できる．このようにして得られた《曲線》を T の斜辺に関して対称なものを作ることによって，一つの正方形

を埋めつくす《曲線》を得ることができるであろう.

このために，第3節で定義した空間 E をとろう. E から T の上への連続写像 h を定義する. T の直角の二等分線は T を二つの（閉）三角形 T_0 と T_1 に分ける，ここで T_0 は頂点 s_0 を含み，T_1 は s_1 を含む三角形を表わす. 同様にして，T_0 は二つの合同な三角形 T_{00} と T_{01} の合併であり，T_1 は T_{10} と T_{11} の合併である. T_{00} を s_0 を含む三角形，T_{01} を T の直角の頂点を含む三角形と呼ぶ. 同様に T_{10} は T の直角の頂点を含み T_{11} は s_1 を含む. また，三角形 T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11} をそれぞれ合同な二つの三角形に分割する. T_{00} を分割した三角形を T_{000}, T_{001} で表わす，… 等. より正確には，これらの三角形の列

$$T_{000},\ T_{001},\ T_{010},\ T_{011},\ T_{100},\ T_{101},\ T_{110},\ T_{111}$$

においてとなり合った二つの三角形はいつでも共通な辺をもっているように番号がつけられている（図 2）. これを続けることができ，各整数 n に対して，三角形 T はそれぞれが 0 または 1 の n 個の数字の列に対応する 2^n 個の合同な三角形に分割される.

さて空間 E の点 x を考えよう. すなわちそれは 0 と 1 からなる無限個の数字の列である，たとえば 0010111 …. これに対してつぎの三角形の無限列を対応させる.

$$T_0,\ T_{00},\ T_{001},\ T_{0010},\ T_{00101},\ T_{001011},\ T_{0010111},\ \cdots$$

各三角形は次にあるものを含み，その直径は 0 に近づく，したがってこれらは共通なただ一点をもつ. この共通な点を $h(x)$ で表わすならば，このようにして E から T への写像 h を定義できる. これが連続であることが証明され，また T の任意の点ははめ込まれた三角形の無限列の少なくとも一つに属するから，h は E を T 上に写像する. しかるに，第3節で E から線分 $I=[0,1]$ 上への連続写像 f を定義した. 他方二つの無限列（たとえば $x=0101111\cdots$ と $y=0110000\cdots$ のようなもの）が $f(x)=f(y)$ であるようなものならば，容易に $h(x)=h(y)$ であることがわかる. すなわちそれらは T の同じ点を定義する. 各点 $u\in I$ に対して，$f(x)=u$ であるような一つの $x\in E$ を選べば，元 $h(x)\in T$ は x の選び方に関係しない. これが関数 $g(u)$ である. I から T 上への写像 g は連続である，なぜならそれは線分 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ を T_0 上に写像し，線分 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ を T_1 上に写像する. 線分 $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$ は T_{00} 上，… 等であるからである. この写像 g が求める《ペアノ曲線》である.

任意の点 $t\in T$ を与えると，g で t に変換される I の点は高々四つ存在するように思われるが，《一般的には》一つしか存在しない.

図3はペアノ曲線の近似を与えている（添数として6つの数字をもった三角形を考えて

得られたものである).

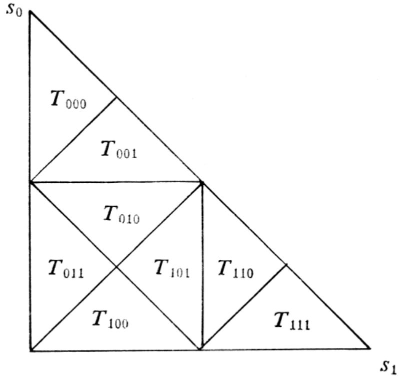


図　2

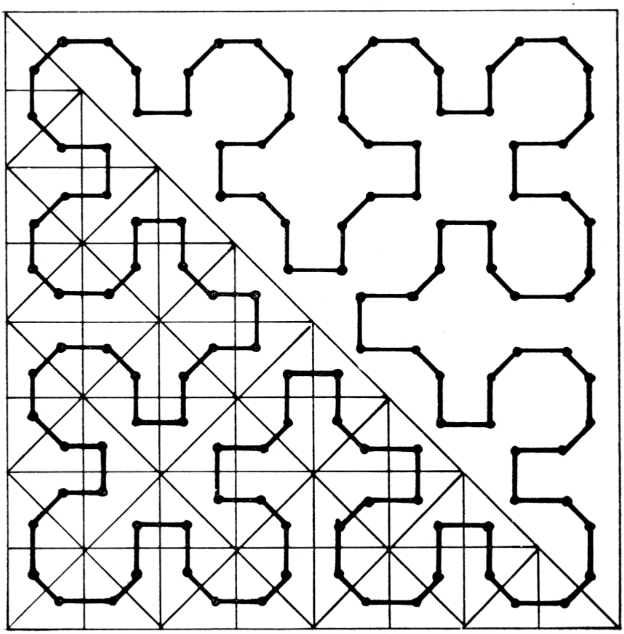


図　3

被覆空間—基本群

フランス大学教授

J. -P. セル

1. 序　　論

被覆の概念は幾何学的な問題でひんぱんに出会う状態での形で表わされる．いくつかの例を与えることから始めよう．

a）Y を円柱上に描かれた螺旋とし（図1参照），螺旋 Y からその円柱の底 X 上への射影 $Y \to X$ を p で表わそう．y が Y の点で，$x = p(y)$ がその射影であるならば，p によって y の適当な近傍と x の適当な近傍との間の一対一で両連続な対応が定義される．もちろん，p は大域的には同相写像ではない．なぜなら Y の異なる点が X において同じ像をもつことができるからである．Y は無限個の葉をもった X の被覆であるという．

別の形では，これは《角度》の被覆であるといえる．すなわち，任意の元 $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して角 α によって定義された円周 $\mathbf{S}_1$ 上の点 $p(\alpha)$ を対応させるものである．

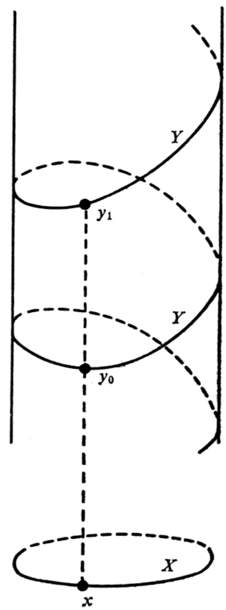


図　1

b）Y として空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の球面 $\mathbf{S}_n$ をとる．すなわち，$\sum x_i^2 = 1$ であるような点 $(x_0, \cdots, x_n, \cdots)$ の集合である．空間 X をここでは n 次元実射影空間 $\mathbf{P}_n$ とし，射影 $p : Y \to X$ は点 $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbf{S}_n$ に座標が同次座標 $(x_0, \cdots, x_n)$ である $\mathbf{P}_n$ の点を対応させるものとする．この射影は Y から X

の上への連続写像であり，X のすべての点は Y の二つの直径対蹠点の像である．これは二つの葉をもった被覆の例である．

$\mathbf{P}_n$ が被覆として $\mathbf{S}_n$ をもっていることは，$\mathbf{S}_n$ の通常の幾何学（$\mathbf{R}^{n+1}$ の距離から導入されたものである）に対応する $\mathbf{P}_n$ 上の楕円型非ユークリッド幾何学の研究に利用される．

c）$Y = \mathbf{S}_3$ をとろう．これはノルムが1の四元数 $a + bi + cj + dk$ の集合と同一視されるものである．四元数の乗法によって $\mathbf{S}_3$ に位相群の構造が与えられる．これはまた，E. カルタンが証明したように，$\mathbf{S}_1$ とともにこの性質をもっているのはこの球面だけである．

三次元空間の点 $\mathbf{M} = (x, y, z)$ を《純》四元数 $xi + yj + zk$ と同一視しよう．$q \in \mathbf{S}_3$ のとき，$R_q(\mathbf{M}) = q\mathbf{M}q^{-1}$ とおくと，この積は四元数環の中で実行され，ただちに $R_q(\mathbf{M})$ がまた純四元数であることがわかる．したがって，$\mathbf{R}^3$ の点である．さらに，$R_q(M)$ のノルムは $\mathbf{M}$ のノルムに等しい．したがって，$\mathbf{R}^3$ からそれ自身への線型変換 R_q は距離を不変に保ち，そこで三次元空間の回転群を $\mathbf{SO}(3)$ で表わせば，$q \longrightarrow R_q$ が連続な準同型写像 $p : \mathbf{S}_3 \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$ であることがわかる．p は局所同相写像であり，すべての回転 $R \in \mathbf{SO}(3)$ は二つの互いに逆数である四元数から得られることが容易に証明される[1]．ここでまた二つの葉をもった被覆が得られた．これによって $\mathbf{S}_3$ に対する回転群，一般的にはより簡単に，群 $\mathbf{S}_3$ の研究に立ちかえることができる．

例 b) と c) を比較して群 $\mathbf{SO}(3)$ は射影平面 $\mathbf{P}_3$ に位相同型であることが示されるが，これは直接的な幾何学的推論によって容易に得られる結果である．

2. 被 覆 の 定 義

X と Y を二つの位相空間，$p : Y \longrightarrow X$ を Y から X の上への連続写像とする．任意の $x \in X$ に対して x を含み，かつつぎの性質を満足する X の一つの開集合 U が存在するとき，Y は射影 p の X の被覆であるという．

(R)　Y における U の逆像 $p^{-1}(U)$ は，すべての添字 i に対して，射影 $p : V_i \longrightarrow U$ が V_i から U の上への同相写像であるような交わらない開集合 V_i の合併である．

（あとの図 2 参照．）

---

1) たとえば，山内恭彦，杉浦光夫共著“連続群論入門”（培風館）81〜82 参照．［訳注］

この条件はまず空間Xの**自明な被覆**というものを定義するとより簡単に表わすことができる．自明な被覆とは，離散空間 E に対する積空間 $X\times E$ であり，写像 $p:X\times E\to X$ は第一の因子への単純な写像である．条件（R）は $p^{-1}(U)$ が Uの自明な被覆に同型であるということで表わされる．いいかえると．すべての被覆は自明な被覆に局所同型である．（Eが離散空間であるという仮定を除けば，より一般的なファイバー空間の概念に到達することを注意しよう．）

第1節の例で条件（**R**）を証明することはむずかしくはない．例 a）ではUとして与えられた点xを含む任意の弧をとれば十分であり，例 b）ではxを通らない超平面上に位置していない $\boldsymbol{P}_n$ の点 x' の集合をとればよい．

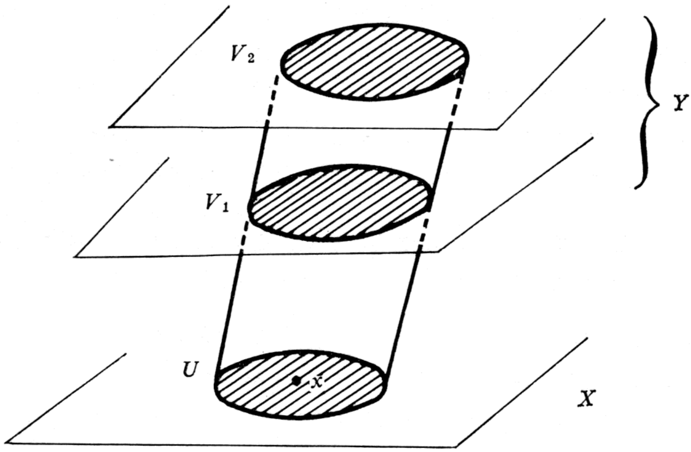


図　2

3. 被覆上に描かれた路

被覆の理論は空間 X と Y に《局所正則》という仮定をするだけで満足される．たとえばXとして，カントルの完全集合のようなまったく不連続な空間をとることは馬鹿げている．つぎの二つの最小の仮定だけは設けることにする．Xは位相多様体であると仮定する（これは実際はあまり制限しすぎるが）．これは X のすべての点が $\mathbf{R}^n$ の開集合に位相同型な開近傍をもつ分離空間であることを意味する．また X は連結であると仮定する．この場合整数 n は定数であり，それは X の次元である (H. カルタンの説明を参照)．条件（**R**）

によって，Y も n 次元の多様体である（しかし必ずしも連結ではない）．

空間 X と Y とは非常に異なったものではないことは直観的に明らかである．局所的には，それらは同型であり（これで被覆の概念の微分幾何学への関心が起こる），それらは大域的な性質において異なるだけである．空間 X と Y のうちの一方が与えられるとある程度まで他方を決定できることがためされる．実際，簡単な結果を発見できるのは X からだけによるものであり，これは X と Y の上に描かれた路の考察に負うものである．

位相空間 X 上の路とは，定義により，連続写像 $f: I \to X$ である，ここで I は線分 $[0,1]$ を表わす．$f(t)$ のかわりに x_t と書くと，路は 0 と 1 との間を変化する添字 t のつけられたもので，この添字について連続的に従属する X の点 x_t の族である．点 x_0 と x_1 はそれぞれこの路の始点および終点と呼ばれる．閉じた路（すなわち $x_0 = x_1$ であるようなもの）は（点 x_0 における）閉路と呼ばれる．X は連結であるから，与えられた始点と終点をもつ路が必ず存在する．

すべての $t \in I$ に対して，$p(y_t) = x_t$ が成立するとき，Y 上の路 y_t は X 上の路 x_t の**持ち上げ**であるという．このような路はいつでも存在する．より正確には，

x_t が X 上の路で，y_0 が x_0 に射影される Y の点であるとき，x_t の持ち上げでありかつその始点が y_0 である Y 上の路 y_t がただ一つ存在する．

実際，まず被覆 $p: Y \to X$ が自明である，すなわち離散集合 E によって $Y = X \times E$ であると仮定しよう．与えられた点 y_0 はこのとき $z \in E$ で $y_0 = (x_0, z)$ と表わされ，そして求める路 y_t は当然 $y_t = (x_t, z)$ であり，これでこの場合には上に述べたことが証明された．一般の場合には，$t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ に対して x_t が第2節の性質（**R**）を満たす開集合 U_i の中に含まれるように区間 $[0,1]$ を区間 $[t_i, t_{i+1}]$ に分割できることに注意して，前のことから導かれる．このとき自明な被覆 $p^{-1}(U_i) \to U_i$ に対して証明したことを適用して，y_t，$t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$，と y_{t_i} の存在と一意であることが結論される．これをつぎつぎに行なって，$0 \leqslant t \leqslant 1$ に対する y_t の存在と一意であることが得られる．

x_t が閉路のとき，路 y_t の終点 y_1 は x_0 に射影されることがわかるが，一般的には $y_0 = y_1$ は成立しない，すなわち，一つの閉路は必ずしも一つの閉路に持ち上げられない（図3を参照）．例 a）で閉路 x_t としてその円自身（適当な形でパラメーターのつけられたもの）をとれば，点 y_1 は y_0 の《上の螺旋》に位置する．例 c）で，x_t として z 軸のまわりの $2\pi t$ の回転をとれば，$y_t = \cos \pi t + k \cdot \sin \pi t$ が成立し，これより $y_0 = 1$，$y_1 = -1$

である．これで被覆を特徴づけるような一つの性質が得られた．それを完全に利用するためには，これから定義する基本群の概念が必要である．

4. ホモトープな路．基本群

X を位相空間，f と g を同じ始点 a 同じ終点 b をもつ X 上の二つの路とする．f と g がホモトープであるというのは，すべてが始点を a，終点を b にもち，$f_0 = f$ かつ $f_1 = g$ であり，u について連続的に従属する［すなわち $f_u(t)$ が対 (u, t) の連続関数でなければならない］ような X の路の族 f_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, が存在するときである．このときこれは与えられた始点と終点をもった路のあいだの同値関係であることがわかる．これを $f \sim g$ で表わす．

ここで特に固定された x_0 についての閉路に適用しよう．さらにこれらの閉路のあいだの結合の算法が得られる．すなわち二つの閉路 f と g の積 $f*g$ はまず f をとらせ，つぎに g をとらせることによって得られる閉路である．もちろん，用いるパラメーターのつけ方をつぎのように正確にする必要がある．

$$f*g(t) = \begin{cases} f(2t) & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}\right) \\ g(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\right) \end{cases}$$

この結合の算法はホモトピーによって定義された同値関係と両立することが容易に証明される．すなわちつぎの式が成立する．

$$f \sim f' \quad \text{かつ} \quad g \sim g' \Rightarrow f*g \sim f'*g'.$$

x_0 における閉路の同値類からなる集合 $\pi_1(X, x_0)$ に，商をとることによって $f*g$ から導入された結合の算法を与えることができる．これによって群が得られる．なぜならば，

i）中立元が存在する．それはすべての t に対して一定である閉路 $e(t) = x_0$ の類である．

任意の閉路 f に対して，$f \sim f*e$ が成立することを証明しなければならない．このために，$0 \leqslant u \leqslant 1$ に対して閉路 g_u の族を式

$$g_u(t) = \begin{cases} f((1+u)t) & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{1+u}\right) \\ x_0 & \left(\dfrac{1}{1+u} \leqslant t \leqslant 1\right) \end{cases}$$

によって定義する.

$g_0 = f$ と $g_1 = f*e$ が成立する，これより $f \sim f*e$ が得られる．同様に $f*e \sim f$ が証明される.

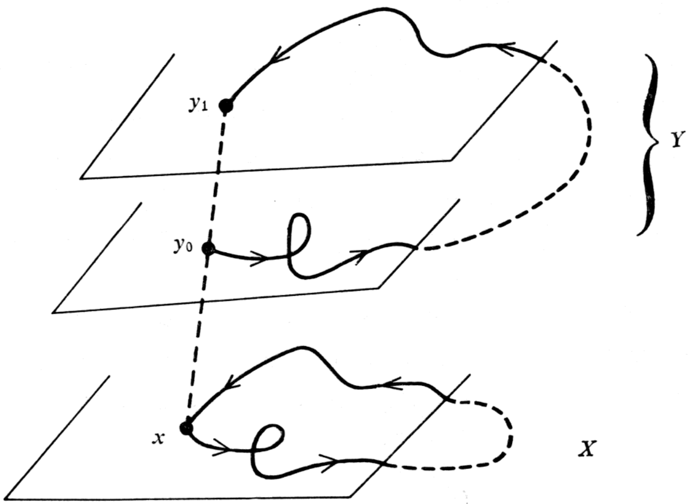


図　3

ii）任意の閉路 f に対して，f の類は逆元をもつ．それは $f'(t) = f(1-t)$ であるような閉路 f' の類である.

$f*f' \sim e$ を証明する必要がある．このために，$0 \leqslant u \leqslant 1$ に対して閉路 h_u の族を式

$$h_u(t) = \begin{cases} f(2ut) & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}\right) \\ f(2u(1-t)) & \left(\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\right) \end{cases}$$

によって定義する.

$h_0 = e$ と $h_1 = f*f'$ が成立する．これより $f*f' \sim e$.

iii）$\pi_1(X, x_0)$ の結合の算法は結合的である.

f, g, h が三つの閉路であるとき，

$$(f*g)*h \sim f*(g*h)$$

が成立することを証明する必要がある.

このために，$0 \leqslant u \leqslant 1$ に対しての閉路 k_u の族を式

$$k_u(t)=\begin{cases} f(4t/(1+u)) & (0\leqslant t\leqslant (1+u)/4) \\ g(4t-1-u) & ((1+u)/4\leqslant t\leqslant (2+u)/4) \\ h(1+4(t-1)/(2-u)) & ((2+u)/4\leqslant t\leqslant 1) \end{cases}$$

によって定義する.

$k_0=(f*g)*h$ と $k_1=f*(g*h)$ が成立する. これより求める結果が得られる.

Xが弧状連結であるとき（これは連結多様体の場合である), 群 $\pi_1(X, x)$, $x\in X$, はすべて同型であることが証明される. このとき $\pi_1(X, x)$ のかわりに $\pi_1(X)$ と書くことができる. これが空間 X の基本群（またはポアンカレー群）である. $\pi_1(X)=0$ のとき, すなわちすべての閉路が定閉路にホモトープであるとき, Xは単連結であるという.

（$\pi_1(X)$ と同様に, 群 $\pi_n(X)$, $n\geqslant 2$, を定義できる. それらは X のホモトピー群と呼ばれる. それらは被覆の理論では必要がない.）

5. 与えられた基底の被覆の分類

第3節の場合にもどろう, そして Y を位相多様体 X の被覆とする. 同じ端点をもつ X 上の二つの路 x_t と x'_t は同じ性質をもつ Y の路に持ち上げることは必ずしもできないことがわかった. しかしながら x_t と x'_t がホモトープのときは同じ性質をもつ路に持ち上げられる. これは二つの路が十分近いときはほとんど明らかであり, 一般の場合には第3節ですでに用いた方法で十分近い場合に帰着される.

x_0 を X の中の固定した点, $E=p^{-1}(x_0)$ を x_0 に射影される点 $y\in Y$ の集合とする. $y\in E$ で $f(t)=x_t$ が x_0 における X 上の閉路のとき, yを始点にもち路 f の持ち上げである Y 上の路がただ一つ存在し, その終点 y_1 は前に述べたことにより閉路f の類 α だけによってきまる. したがってそれを $y*\alpha$ と表わすことができる. 等式

$$y*e=y$$
$$y*(\alpha*\beta)=(y*\alpha)*\beta \qquad (\alpha, \beta\in\pi_1(X))$$

が成立する.

任意の $\alpha\in\pi_1(X)$ に対して, 写像 $y\longrightarrow y*\alpha$ は集合 E の置換であり, 二つの元 α と β の積に対しては（逆の順序での）置換の積が対応する. これを E の置換による $\pi_1(X)$ の表現が得られたといい表わす.

基底 X の被覆の分類の定理は, よってつぎのように表わされる.

集合 E の置換による $\pi_1(X)$ のすべての表現は一つの被覆 $Y \to X$ に対応しかつその対応はただ一通りである（もちろん，同型の違いは除いて）.

証明の原理だけを述べよう．これは，X と E と演算 $y*\alpha$, $y \in E$, $\alpha \in \pi_1(X)$ とによって Y を再構成することに関係している．$z \in Y$ とすると，X の中の z の射影 $p(z)$ を路 f によって点 x_0 に結ぶことができる．この路を持ち上げることによって，z が一つの路によって少なくとも一点 $y \in E$ に結ばれることがわかる．さらに，y と f を知ることによって z が決定される．すなわち，二つの対 (y, f) と (u, g) は閉路 $f*g'$ の類 α が y を u に変換するとき，すなわち $u = y*\alpha$ であるときにかぎって同じ点 z に対応する（図 4 参照）．したがって Y を同値関係

$$u = y*(f*g') \text{ ならば } (y, f) \sim (u, g)$$

による対 (y, f) の集合の商集合と同一視できる.

X, E と演算 $y*\alpha$ によってただ一通りに Y の位相を定義することが残されている．これには重大なむずかしさは起こらない（しかしそれには X についての局所正則であるという仮定が必要である）.

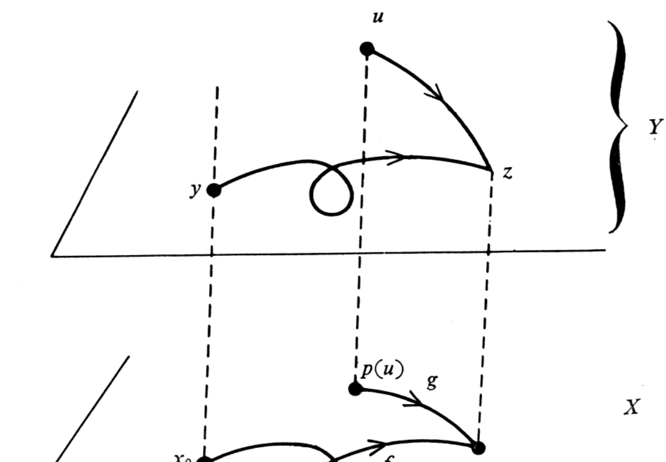


図 4

最も興味のある場合は Y が連結のときである．これは E の二点が一つの路で結ぶこと

ができる，または $\pi_1(X)$ によって定義された E の置換群が推移群であるということである．y_0 が E における固定点であるとき，$y_0*\alpha = y_0$ であるような $\alpha \in \pi_1(X)$ の集合は $\pi_1(X)$ の部分群 H であり，そして E は $\pi_1(X)\,\mathrm{mod.}\,H$ の類の集合と同一視される．したがって X の連結な被覆は $\pi_1(X)$ の部分群に対応することがわかる．特に，Xがそれ自身以外に他の連結被覆空間をもたないためには（すなわち《一つの葉をもった》被覆），X が単連結であることが必要十分である．

Hとして中立元に還元される $\pi_1(X)$ の部分群をとると，Xの普遍被覆と呼ばれるXの被覆 $\widetilde{X}$ が得られる．《普遍》という術語は $\widetilde{X}$ がX のすべての連結被覆 Y の被覆であることに由来している．すなわち，$p:\widetilde{X} \to X$ は $\widetilde{X} \to Y \to X$に分解されるということである．

特に $\widetilde{X}$ は単連結であり，そしてこれがこの性質をもつ X のただ一つの連結被覆であることがわかる．

Yが射影がpである X の一つの被覆のとき，$p\circ g = p$ であるようなすべての連続写像 $g: Y \to Y$ を Y の自己同型写像（または被覆変換）と呼ぶ．このような写像は当然 Y からそれ自身の上への同相写像である．$Y = \widetilde{X}$ である特別の場合は，$\widetilde{X}$ の自己同型写像の群は $\pi_1(X)$ に同型であることが証明される（この同型は点 $x_0 \in X$ の選び方に関係する），$\widetilde{X}$ の二点y_1とy_2は $g(y_1) = g(y_2)$ であるような $\widetilde{X}$ の自己同型写像gが存在するときにかぎって同じ射影をもつ．

6. 基本群の決定

空間 X の基本群 $\pi_1(X)$ を知ることによって X のすべての被覆が決定できることがわかった．したがって与えられた空間 X に対して $\pi_1(X)$ を実際に計算することが興味あることである．このような計算のいくつかの例を示そう．

1)　$X = \mathbf{R}^n$，n 次元ユークリッド空間．

fを座標が $(0, \cdots, 0)$ の点を始点および終点とする閉路とする．$0 \leqslant u \leqslant 1$ のとき，$f_u(t) = u \cdot f(t)$ とおくと，$f_1 = f$ が成立し，そして閉路 f_0 は定閉路である．よってすべての閉路fは$\mathbf{0}$にホモトープであり，これによって $\mathbf{R}^n$ は単連結，すなわち $\pi_1(\mathbf{R}^n) = \mathbf{0}$ であることが示される．

2)　$X = \mathbf{S}_1$，円．

$\pi_1(\mathbf{R})=0$ であるから，第1節 a) の被覆 $\mathbf{R}\to\mathbf{S}_1$ は $\mathbf{S}_1$ の普遍被覆である．したがってその自己同型写像群は $\pi_1(\mathbf{S}_1)$ に同型である．しかるに，この群は明らかに大きさ na の垂直方向の平行移動によって形成される．ここで a は二つの螺旋の間の距離である．したがってこれは整数の群 $\mathbf{Z}$ に同型である．これより

$$\pi_1(\mathbf{S}_1)=\mathbf{Z}.$$

3) $X=\mathbf{S}_n$, $\mathbf{R}^{n+1}$ における n 次元球面 ($n\geqslant 2$ とする).

まず $\mathbf{S}_n$ 上のすべての閉路 f は，大円の弧の端と端を結んだものからなる《折れ線》の形の閉路に連続変形できることが示される（区間 $I=[0,1]$ を部分区間に分解し，その部分区間に対して $f(t)$ が固定した半球内にあるようにする．そして大円の一つの弧上へのこの半球の連続変形が定義できるからである)．これによって新しい閉路 f' 上に位置しない一点 P を選ぶことができる（これはペアノ曲線 f に対しては当然できないであろう)．立体射影を実行することによってわかるが，$\mathbf{S}_n$ における P の補集合は $\mathbf{R}^n$ に位相同型である．したがって 1) により，閉路 f' はこの補集合において 0 にホモトープである．よってむろん $\mathbf{S}_n$ においてもそうであり，これは f についても同様である．これより

$$n\geqslant 2 \text{ に対して} \qquad \pi_1(\mathbf{S}_n)=0$$

4) $X=\mathbf{P}_n$, n 次元射影空間.

$n=1$ のとき，$\mathbf{P}_1$ は $\mathbf{S}_1$ に位相同型である．したがって $\pi_1(\mathbf{P}_1)=\mathbf{Z}$. よって $n\geqslant 2$ と仮定する．第1節 b) の被覆 $\mathbf{S}_n\to\mathbf{P}_n$ は $\pi_1(\mathbf{S}_n)=0$ であるから，$\mathbf{P}_n$ の普遍被覆である．したがってこの被覆の自己同型写像群は $\pi_1(\mathbf{P}_n)$ に同型である．この被覆は二つの葉をもつから，$\pi_1(\mathbf{P}_n)$ は二つの元をもつ群であると結論される．これより

$$\pi_1(\mathbf{P}_n)=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \qquad (n\geqslant 2)$$

5) $X=\mathbf{T}^2$, 2 次元輪.

輪は積 $\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_1$ に位相同型である．式

$$\pi_1(X\times X')=\pi_1(X)\times\pi_1(X')$$

は容易に得られる．これより

$$\pi_1(\mathbf{T}^2)=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}, \text{ 二つの生成元をもつ自由アーベル群}$$

が導かれる．

また，平面 $\mathbf{R}^2$ は $\mathbf{T}^2$ の普遍被覆であるという事実を用いて，自己同型写像群は，独立なベクトル $\vec{\omega}$ と $\vec{\omega}'$ による平行移動 $m\vec{\omega}+m'\vec{\omega}'$ の群である（楕円関数参照）ことがただちに推論される．

$\pi_1(\mathbf{T}^2)$ の生成元として子午線と緯線をとることができることを注意しよう.

6)　Xが《二つの穴》をもった向きづけ可能な曲面.

これまでの例ではすべて普遍被覆 $\widetilde{X} \to X$ を明確に与えることができた. そしてそれを $\pi_1(X)$ を得るために利用した. ここでは, それは非常にむずかしい（しかしながら保型関数を使って求めることはできるが), そこで他の方法を用いなければならない.

曲面 X をシェーマ $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ によって同一視された8辺の多角形として表現する(図5参照). これらの辺のおのおのはしたがって X 上の一つの閉路を表わし, その各類を $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \cdots$ 等で表わす. 積の閉路 $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$ は0にホモトープであることは明らかである. このとき 3) で用いたと同じような変形の方法により, 元 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が $\pi_1(X)$ を生成し, そしてそれらが満足するすべての関係は

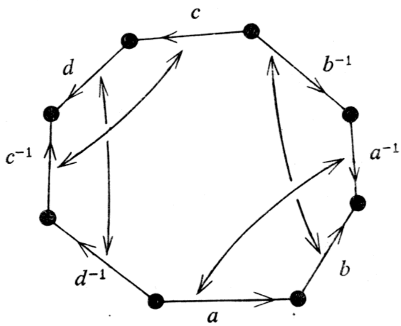


図　5

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1$$

というただ一つの関係によるものであることが証明される.

したがってこれを縮めた形

$$\pi_1(X) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}/(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1})$$

に表わすことができる.

これで基本群がアーベル群でない空間の例が得られた.

7.　単連結の概念の応用. 一価性定理

単連結な空間の概念はつぎのような形で複素関数論の中にでてくる.

X' を複素平面 $\mathbf{C}$ の一つの領域, x_0 を X の一点, f_0 を x_0 の近傍で収束する $(x - x_0)$ についての整級数とする. x_t が始点 x_0 の X 上の路であるとき, 路 x_t にそっての f_0 の解析接続の概念を定義できる. これは一般的には必ずしも可能な操作ではない. 与えられた級数 f_0 に対して, 接続がとにかく可能であると仮定し, かつ X は単連結であると仮定しよう. このとき x_0 の近傍で f_0 と一致する X 上の正則関数 f が存在する. これが一価

性（モノドロミー）定理である．これによって解析接続は与えられた路に関係しないということになる．なぜなら，近くにある二つの道に対してはこれは明らかであり，単連結であるという仮定によって近接した路をつぎつぎにとることにより一つの路から他の路へもってゆくことができるからである．

もちろん，この定理は一変数の複素関数だけに特別なものでなく，多変数複素関数，調和関数等に対しても同様に成立する．ただ一つの条件は局所的に接続の一致性が存在することである．

つぎの結果は一価性の原理に関係づけられる．

G と H を二つの連結な位相群，f を G から H への《局所準同型写像》とする．すなわち G の中立元の近傍から H への連続写像で，x と y が中立元の十分近くの元であるとき $f(xy)=f(x)f(y)$ が成立するものである．このとき G が単連結ならば，f の接続である G から H への大域的な準同型写像が存在する．

例　$G=\mathbf{R}$, $H=\mathbf{S}_1$，および $G=\mathbf{S}_3$, $H=\mathbf{SO}(3)$（第1節参照）.

8. 基本群の概念のトポロジーへの応用

群 $\pi_1(X)$ は明らかに空間 X の不変量である，すなわち二つの空間 X と X' はそれらの基本群が同型であるときだけ位相同型でありうる．$\pi_1(X)$ は X の他の位相的不変量，特に X のホモロジー群（L. シュヴァルツの講義を見よ）と，どのような関係があるかが問題になる．1次元ホモロジー群 $H_1(X)$ は，実際，$\pi_1(X)$ に対して用いた方法と非常に似た方法で定義される．閉路は1次元輪体にほかならないし，0にホモトープな閉路は境界である．しかし，逆は真ではない（前の引用と同じ），そして群 $\pi_1(X)$ と $H_1(X)$ は一般には異なる．ただ

群 $H_1(X)$ はアーベル群であるときの $\pi_1(X)$ と同型である

が成立するだけである．

$\pi_1(X)$ は $H_1(X)$ よりもより精密な不変量であるという結論になる．ポアンカレによる例を与えよう．

K を正二十面体を自分自身に移す空間 $\mathbf{R}^3$ の回転群とすると，K は五つの文字の交代群 A_5 に同型であることがわかる．第1節，c）の被覆 $p:\mathbf{S}_3\to\mathbf{SO}(3)$ において，K の逆像 G は120個の元をもつ $\mathbf{S}_3$ の部分群である．さらに，アーベル群として表わされた群 G

は0に等しいことになる．このとき $X = \mathbf{S}_3/G$ を $\mathbf{S}_3$ の G によって定義された同値関係による商として定義する．空間 X は $\mathbf{S}_3$ を普遍被覆にもち G を基本群としてもつ3次元のコンパクト多様体である．$\pi_1(X) = G$ が $\pi_1(\mathbf{S}_3) = 0$ と異なっているけれども，$H_1(X) = 0$ であり，それで X は $\mathbf{S}_3$ と同じホモロジー群をもつことが結論される．空間 X はポアンカレの空間と呼ばれる．これに関連してポアンカレの予想（これは今でも証明されていない）を述べよう．

連結でしかも単連結なすべての3次元のコンパクト多様体は，球面 $\mathbf{S}_3$ に位相同型である．

基本群のトポロジーへの別の応用として結び目の理論を述べよう．

結び目というものは円 $\mathbf{S}_1$ に位相同型な $\mathbf{R}^3$ の部分空間 N である．すなわち，$\mathbf{R}^3$ の二重点のない一つの閉路である．$\mathbf{R}^3$ 全体のそれ自身の上への同相写像で，N を N' へ変換し $\mathbf{R}^3$ の向きを保存するものが存在するとき，二つの結び目 N と N' は同型であるという．円に同型な結び目は自明な結び目といわれる（それは実際には《結ばれて》いない）．与えられた結び目，たとえば《クローバ型の結び目》（図6）が自明でないことはどのようにして証明できるか．もしも N と N' が同型ならば，それらの補集合 $\mathbf{R}^3 - N$ と $\mathbf{R}^3 - N'$ は位相同型であるから，それらは同じ基本群をもつことを注意しよう．したがって $\pi_1(\mathbf{R}^3 - N)$ の研究に導かれる．これは結び目 N の群である．同型でない群をもつ二つの結び目は同型ではない．生成元と関係からその射影によって与えられた結び目の群を決定できる方法がある．自明な結び目 $\mathbf{S}_1$ の場合，この群は $\mathbf{Z}$ であり，クローバ型の結び目の場合は関係 $xyx = yxy$ をもった二つの生成元 x と y によって生成されることがわかる．この群はアーベル群でないから（実際，それは商としては三つの文字の対称群となるからである），それは $\mathbf{Z}$ に同型ではない，さらに期待していたようにクローバ型の結び目は確かに結ばれている．

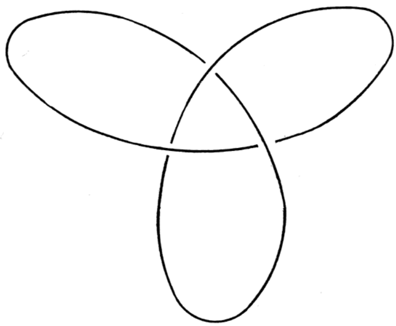


図　6

ここでふたたびホモロジー群はまったく利用することができないことを注意する．実

際，すべての結び目 N に対して $H_1(\mathbf{R}^3 - N) = \mathbf{Z}$ だからである.

9. 代数関数の存在定理への応用

C を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の特異点のない代数曲線とし，f を C 上の有理関数とする．f を C から球面 $\mathbf{S}_2$（無限遠点をつけ加えた複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視されたもの）への連続写像と考えることができる．f が定数関数であるような特別な場合は除外しよう．写像 $f: C \to \mathbf{S}_2$ によって C は $\mathbf{S}_2$ の《分岐する被覆》になる．これは写像 f が零の微分係数をもつような点を $\mathbf{S}_2$ から取り去ると，真の被覆 $Y \to X$ が得られることを意味する．したがって空間 X は点 $P_1, \cdots, P_r$ を取り除いた $\mathbf{S}_2$ に等しく，Y は P_i の逆像を取り除いた C に等しい．つぎに述べるのが，一変数の代数関数に対するリーマンの存在定理である.

点 $P_1, \cdots, P_r$ を取り除いた球面の，有限個の葉をもった連結なすべての被覆は上に述べた方法で得られ，そしてそれはただ一通りである.

（ただ一通りであることは容易であるが，存在の証明にはたくみな解析的な方法が必要である．最初の証明は（まさしく！）ヒルベルトによって与えられた.）

$X = \mathbf{S}_2 - \{P_1\} - \cdots - \{P_r\}$ の基本群は $r-1$ 個の生成元をもった（非可換な）自由群である．上に述べたことがらは $r-1$ 個の与えられた置換によってお互いに変換されるある数の《関数要素》をもった代数関数の存在定理に翻訳される．これはリーマンがこの形で与えたものである.

曲線 C のかわりに，曲面 S をとるならば，射影的直線 $\mathbf{S}_2$ を複素射影平面 $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ でおきかえ，点 $P_1, \cdots, P_r$ をこの平面の代数的曲線 $D_1, \cdots, D_r$ でおきかえる必要がある．存在（と一意性）はこの場合も成立する．これはエンリケスの定理である.

参 考 文 献

最も優れた参考文献は疑いもなく

H. SEIFERT und W. THRELFALL—*Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1934, 1947 年に Chelsea で写真印刷された（第 7 章と 8 章を参照).

基本群と，普遍被覆の構成およびそれらの位相群への応用については,

L. ポントリャーギン—位相群論，岩波書店,（第 8 章）を参照せよ.

代数的位相幾何学．ホモロジーの原理

ソルボンヌ大学教授

L．シュヴァルツ

まずポアンカレの時代に位置解析学（*l'Analysis Situs*）と呼ばれたことがらに関するいくつかの問題について述べよう．それによって代数的位相幾何学を構成している科学の基礎にある直観的な概念について示唆し，それでホモロジーに関係する問題を明確にすることにしよう．

1．直観的幾何学のいくつかの問題

1）球面，すなわち三次元空間の曲面上で閉曲線の概念をもっている．閉曲線であるという性質を保存する連続変形によって，それを一点に縮めることができる（あとでこれをその曲線は零にホモトープであるといい表わす）．

しかし，輪の曲面上で前のタイプの曲線，すなわち一点に縮めることができるもの特に輪の十分小さな領域の中にある任意の閉曲線と，中央の円のまわりにまきついている子午線のような曲線C'と，輪の軸のまわりにまきついている緯線のような曲線C''とがただちに区別できる．曲線C'と曲線C''は一点に縮めることはできないし，それらを閉曲線のままで連続変形によって一方から他方へ移すこともできない．

この注意によってひきおこされる問題はホモトピーの対象である．

2）一点へ縮める問題は交わりの問題に関係している．たとえば輪上の曲線C'とC''は必ず少なくとも一点で交わる（また二次曲面上の母線の二つの族を考えることもできる）．

3) 領域の問題

《穴のあいた》三次元空間 R^3，すなわち一点たとえば原点を除いたもの（したがってそれは $R^3-\mathrm{O}$）を考えよう．その中のすべての閉曲線は一点に縮めることができる．しかしそれはすべての閉曲面に対しては必ずしもそうではない．すなわちOが球面の内部領域にあるときは，R^3 の中でこの球面をOを通さないで一点に縮めることはできない．したがってこれによって曲面のホモトピーの問題が与えられる．この球面のような曲面と半直線 $\mathrm{O}x$ に類似な曲線との交わりの問題がふたたびもちあがる．

これらの問題を正確な定義を与えないで数学的に研究することは明らかにできない．たとえば，線分 $[0,1]$ の連続写像による像はコンパクトな曲線と呼び，0と1で同じ像をもつときはこの曲線は閉であると呼ぶことは知っている．平面に対しては，ジョルダンの定理の述べていることがらを知っている．すなわち，二重点をもたないすべての閉曲線は平面を二つの領域に分ける（同じ領域の二点は，定義により与えられた曲線と共通点をもたない連続曲線によって結ぶことができ，異なる領域にある二点に対してはこのような結合は不可能である）．したがってこれは交わりの問題に関するものである．輪上でこれは成立しない．すなわち前に名づけた曲線 C' または C'' は閉であり二重点をもたないが，曲面を二つの領域に分けないということを考えれば，この結果は明らかであり損得からでなくもうこれ以上は考えないことにする．

4) 場の問題

円周上の接線でけっして0になることがなく，円周上の点とともに連続的に変化するベクトル場を定義できることは明らかである．しかし，これが R^3 の球面上で可能であるか．答は《否》である．だがしかし，これは R^4 の3次元球面上では可能である．R^{n+1} の球面 S^n 上で n が奇数であるときにかぎってこのような場が存在することが示される．さて，この問題は曲面上の微分方程式の研究と，特異点，鞍部，結び目，… 等の存在と分類にとって第一義的なものである（レフシェツの仕事）．

5) 同じ性質をもった問題に変換の不動点の存在の問題がある．たとえば，一つの球からそれ自身へのすべての連続写像は少なくとも一つの不動点をもつ．

6) 複素平面における留数の計算を扱うとき，線積分を研究しそしてその曲線が原点または特異点のまわりを《一周する》ことを何回繰り返すかを数える．これは正，零，また

は負の数であり，それはその曲線と対象としている点と複素平面の無限遠点とを結ぶ曲線との交点の《代数的》な数に関係づけられる．簡単な場合には直観的に明らかであるが，この《回転数》が定義できる．

2. 曲面の境界

前のことがらに関連した問題で，特に典型的なものをより詳細に研究しよう．コンパクトな空間だけに制限しよう．

非常に単純な位相空間上に，一つの閉曲線（二重点をもっていてももっていなくともよい）を与えよう．この曲線は一つの曲面の境界になりうるか？

まずこの表現の意味することを直観的に調べよう．

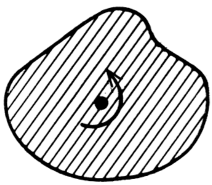


図　1

各点で向きづけられた一つの曲面の限界になっている一つの曲線を仮定しよう（図1）．この曲線は選ばれた向きと同じに向きづけられるであろう．逆に，きめられた向きで廻る一つの閉曲線があるとする．これは一つの曲面の《境界》になりうるか，球面上ではしかりである．これは異なる向きをもつことになる二つの曲面の境界である．しかし輪上ではどうか．これは子午線と類似な曲線 C' にとっては否である．なぜならば，曲面を向きづけるとその曲線上で二重の向きをもつことになり，そこでこのとき反対向きに二回廻ったこの曲線を零とみなさなければならないことがわかるからである．緯線のような曲線 C'' についても同様である．したがって，輪上ではある種の曲線は曲面の境界ではない．$\boldsymbol{R}^2-\mathrm{O}$ においても同様である．この場合，前に述べたようにコンパクトな曲面に制限しているから無限遠点にゆくことは禁じている．$\boldsymbol{R}^3-\mathrm{O}$ においては，曲線は境界である．しかしOのまわりを廻る球面は境界ではない．

いくつかの例をもってきたが，それらは《一点に縮める》ことと《曲面の境界》の二つの問題に対して同じものでありこれらの概念のあいだに確かに関連があることを示している．第一のもの，すなわち一点に縮めることはホモトピーの問題であり，第二の曲面の境界の問題はホモロジーの問題である．これらの問題は同値ではない．ホモトピーの観点はつぎの意味でより精細なものである．すなわち，連続変形によって一点に縮められるすべての閉曲線は一つの曲面の境界であり，また一点に縮めることのできるすべての曲面は立体の境界である，… 等．しかしこれらの逆は正しくはない．連続変形によって一点に縮め

られない曲面（立体，… 等）の境界が存在する．

これをつぎの例で示そう．

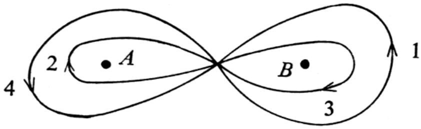


図　2

第 1 の例.　平面 R^2 で，二点 A, B を離しておき，図 2 で示されているような一つの曲線 1234 を考えよう．この曲線は明らかに一つの曲面の境界であり，そして，ホモロジーでは逆向きに向きのつけられた弧を重ねて零にすることができる．しかしホモトピーではそれを一点に縮めることはできない．

第 2 の例.　図 3 は二つの穴があけられておりその端が一つのチューブで結ばれた一つの曲面を表わしている．それらの穴を廻わる曲線 C は一つの曲面の境界であるが，それは

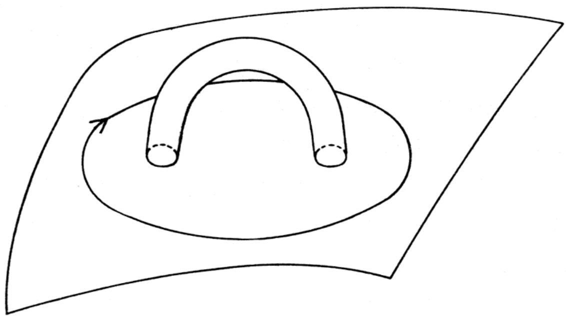


図　3

明らかに一点に縮めることはできない．このチューブが二点を結合する単なる線に縮められる場合でさえもそうである．

このようにホモロジーの理論はホモトピーの理論よりも単純である．ホモトピーの理論がまずポアンカレによって着手されたが，ホモロジーの方へ急速に発展していった．

特に，前に述べた留数の定理にとってはホモロジーの観点が真に有用である．つぎの定理を思いおこそう．まずおおまかな形では，$f(z)$ が平面で一様正則な関数ならば，$\int_C f(z)dz=0$ である．ここで C は任意の閉曲線である．しかしこの関数が極をもつときは，各極に対してコーシーはその極に関する関数の留数と呼ぶ一つの係数を定義した．そこでコーシーの基本定理は等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum R_i$$

で表わされる．右辺はCがそのまわりを《廻る》極に関しての留数の和である．

図2で，もしも極がAとBならば，曲線が境界になっている曲面は極を含んでいないから，積分は零であることがわかる．しかるに，その曲線は（極を横切らないで）一点に縮めることはできない．図4では，図に示された向きをもった曲線は，Aのような点では係数1をとらせるべきであるが，しかしBのような点では係数2をとらせなければならないことがわかる．同様に，図5と図5′では，＋1と＋1および＋1と－1を用いなければならない．

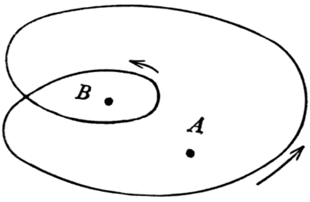


図　4

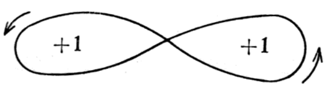


図　5

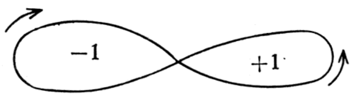


図　5′

したがって曲線を一つの曲面の境界として考えなければならないし，また極の近傍でその曲面に係数を与えるためにその曲線の向きと重複度を考慮しなければならない．複素一変数の有理関数はリーマン球面上の有理形関数と考えることができる．しかるにその球面上の単純な閉曲線Cはそれらの合併がその球面全体をなす曲面S_1とS_2の境界であり，それらに対して＋1と－1を与えることになる．したがって前の積分はS_1の中にある極の留数の和からS_2の中にある極の留数の和を引いたものになる．したがってこれから留数の全部の和は零であることが導かれる．しかしいま考察した曲線は実際には存在しないことは明らかである．この結論を得るためには，境界が零のこの球面全体の曲面を考えれば十分である．

3. 精密な定義と研究

どのようにして問題が提起されたかを示し，その重要性を感じとった．そこでそれらに精密な定義を与えることが問題になる．すべての数学的理論は直観的な考えを表わしているが，しばしばそれは本質的に修正する必要がある．直観は証明のさまたげになることも

あるし，また不当前提に導く危険もある．ここでは球面 S^2 や輪 T^2 のようなコンパクト位相空間に制限しよう．対象とする曲面は三角形分割可能であると仮定できる，すなわち単体によって敷きつめられるということである．

複体．　R^{n+1} の中で n 次元の単体を定義した（カルタン氏の講義を参照．$n=0$ のときは一点であり，$n=1$ のときは線分，$n=2$ のときは三角形の面であり，$n=3$ のときは四面体の立体である，等)，それらの面，すなわち n より低い次元の単体についても同様である．曲面 S^2, T^2，またはあるコンパクト位相空間について，もしもつぎの条件が実現されるならば，単体によって敷きつめられるという．

1)　その曲面上の単体は R^n の単体から同相写像によって定義される，すなわちその曲面上に選ばれた各単体 σ は R^n の一つの単体 σ^1 によって定められた同相写像によって対応するものである（次元 $\leqslant n-1$ の σ の面がうまく定義されるような方法で)．σ は位相的単体である．

2)　その曲面は有限個の単体で被覆される（コンパクトの仮定)．

3)　二つの単体の共通部分は空であるかまたは共通な一つの面である．

空間がこのように敷きつめられるとき，それを**複体**と呼ぶ．

一般的な形で，仮定 2) により，この三角形分割で得られた複体の位相的次元をこれらの単体の最大の次元 n で定義する．しかし全体にわたって同じ位相的次元をもつことは必ずしもできないことを注意する必要がある（たとえば，一つの線分をつけ加えた球面を考えよ)．

三角形分割可能な曲面では問題が非常に簡単になることが想像できる，たとえば曲線は一次元単体の合併である．しかしすべての位相的多様体は三角形分割可能であるか？　この一般的な問題は未解決である．けれども，この単純化の仮定は少なくともその発端において，正当化づけられる．一方，一つの空間が多くの異なる三角形分割をもつとしても，あとで定義するホモロジー群はそれらに独立であることが示される．

一つの複体の鎖．　まず p 次元の順序単体，または p-順序単体を定義しよう．

p-順序単体は，複体の同一の単体のすべての頂点の異なるものまたは同じものからなる順序の決められた $p+1$ 個の点の系 $a_0a_1\cdots a_p$ である．

したがって 0-順序単体は，その三角形分割の一つの頂点 a_0 である．

1-順序単体は二つの頂点の系 a_0a_1 である．a_1a_0 は a_0a_1 とまったく異なるものと考えられる別の 1-順序単体であることに注意する必要がある．a_0a_0 は二つの頂点が一致した

ものとしてまた 1-順序単体と考える．

pを選ぶと，p-順序単体の数は有限個 N_p（仮定 2）であり，それらは

$$\gamma_p^1,\ \gamma_p^2, \cdots, \gamma_p^{N_p}$$

と表わすことができる．

定義により，p-鎖は p-順序単体の整数係数をつけた線型結合

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N_p} \xi_i \gamma_p^i, \qquad \xi_i \in Z$$

である．

鎖の間につぎのように加法を定義する．

$$\left(\sum \xi_i \gamma_p^i\right) + \left(\sum \eta_i \gamma_p^i\right) = \sum (\xi_i + \eta_i)\gamma_p^i$$

この加法は結合的でありかつ可換である．零鎖（すべての i に対して $\xi_i = 0$ であるもの）はこの加法の中立元である．

したがって p-鎖の集合はアーベル群をなし，それを Γ_p で表わそう．

p-鎖の境界．　これはつぎに定義するような $(p-1)$-鎖である．定義により，一つの p-鎖は

$$\sum_{i \in I} \xi_i \gamma_p^i, \qquad I \text{ は } 1, 2, \cdots, N_p \text{ の集合}$$

と書かれる．

まず

$$\left(\sum \xi_i \gamma_p^i\right) \text{の境界} = \sum \xi_i (\gamma_p^i \text{の境界})$$

と仮定しよう．

したがって一つの順序単体の境界を定義することだけが残されている．

順序単体 a_0 は 1 次元である．その境界は零である．

順序単体 ab は一次元である．その境界は 0 次元の一つの順序単体である．それを (ab) の境界 $= +b - a$ と定義し，$\partial(ab)$ と表わす．

2 次元の順序単体 abc の境界は

$$\partial(abc) = bc - ac + ab$$

となるであろう．一般的な形では，p-順序単体 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_p$ は境界として，$(p-1)$-鎖 $a_1 a_2 \cdots a_p - a_0 a_2 \cdots a_p + \cdots + (-1)^k a_0 a_1 \cdots a_{k-1} a_{k+1} \cdots a_p + \cdots + (-1)^p a_0 a_1 a_2 \cdots a_{p-1}$

をもつ.

よって非常に簡単な形式的な計算によって一つの p-鎖の境界を決定できる.

p-次元輪体. (これは p 次元の一つの閉多様体に位相的に同値である.) 定義により，p-輪体はその境界が零であるような p-鎖である.

p-鎖をその境界に変換する操作は（その定義より）加法を保存するから，p-輪体の集合は p-鎖の群 Γ_p に含まれるアーベル群 Z_p である.

問題. p-輪体のうちで，$(p+1)$-鎖の境界であるものはどのようなものか.

1) 境界は輪体である，すなわち境界の境界は零である. 一つの順序単体についてこれを証明すれば十分である. すなわち，$\partial\partial\gamma_p^i=0$ である.

たとえば，

$$\partial(abc)=bc-ca+ab$$

$$\partial\partial(abc)=c-b-c+a+b-a=0$$

このことは容易に一般化できる.

したがって境界になっているような p-鎖の集合を B_p と表わせば，包含関係 $\Gamma_p\supset Z_p\supset B_p$ が成立する.

2) したがって，境界の群は輪体の群の部分群である. しかし，これらの群は一致するか？ 直観的に答は，球面 S^2 に対してはしかりであり，輪 T^2 に対しては否であることがわかる. 商群 $Z_p/B_p=H_p$ を調べてこの区別をより精密にしよう. この商群は考察している多様体の，p 次元ホモロジー群と呼ばれる[1]. これによって研究しようとする構造が特徴づけられる. 境界である p-鎖，したがって B_p の元であるものは零にホモロガスであるといい，~ 0 と表わす. 二つの輪体 Γ,Γ' は，それらが同じホモロジー類に属すとき，すなわちそれらの差が零にホモロガスであるとき（この差が境界であるとき），ホモロガスであるという，そして $\Gamma\sim\Gamma'$ と表わす.

ホモロジー群の計算は代数的位相幾何学の方法でなされる. いくつかの注意だけを示そう.

a) 退化した順序単体 aa は輪体である. なぜならその境界が $a-a=0$ であるからである. これは境界でありうるか. しかり，これは aaa の境界である. したがって，これは

---

[1] つぎのことを思い起こそう. Z が加法で表わされたアーベル群で B がその部分群であるとき，$H=Z/B$ はつぎの同値関係で定義された同値類の集合である.

$\begin{cases}x\in Z\\ y\in Z\end{cases}$ のとき $x\equiv y \Leftrightarrow x-y\in B$

零にホモロガスである．よってこの鎖を消去できる．すなわち，$aa \sim 0$.

b）鎖 $ab + ba$ は零にホモロガスである，すなわち $ab + ba \sim 0$. 実際，bab の境界は $\partial(bab) = ab - bb + ba \sim ab + ba$. したがって，ホモロジー的な観点から，$ab$ を $-ba$ でおきかえることができ $ab \sim -ba$ であるからである．

c）より一般的に，一つの順序単体についてその頂点を入れかえると，それが偶置換であるか奇置換であるかによってホモロガスであるかまたはそうではない順序単体が得られる．

ホモロジー群の計算の例

1）三角形分割された球面 S^2. 0-輪体は 0-鎖 $\sum \xi_i a_i$ である．ここで a_i はその三角形分割の頂点である．

0-境界は $\sum \xi_i = 0$ であるような 0-輪体 $\sum \xi_i a_i$ である．この条件は一つの順序単体の境界に対して真であるから，実際明らかに必要である．

これはまた十分である．なぜならば，この球面上ですべての頂点 a_i に対して一つの選んだ頂点 a_0 を結ぶことができるから，すべての鎖（$a_i - a_0$）は ~ 0 である．しかるに，$\sum \xi_i = 0$ ならば，$\sum \xi_i a_i = \sum \xi_i (a_i - a_0) \sim 0$.

ゆえに，二つの 0-輪体に対して整数の同じ値 $\sum \xi_i$ が対応するときは，この二つの 0-輪体は同値であるかまたはホモロガスである．すなわち，ホモロジー群 $H_0 = Z_0/B_0$ は正，負および零の整数の群である．

この結論は任意の二点が一次元単体からなる折れ線で結ぶことができる．すなわちその複体が連結な位相空間であるならば成立する．たとえば，これは二つの交わらない球面の集合に対してはもはや成立しない．このとき H_0 は整数の対の群である．よって H_0 によって連結成分の数が与えられることがわかった．

今度は $H_1 = Z_1/B_1$ を考察しよう．球面については，一次元のすべての輪体は境界であることが示される．したがって B_1 は Z_1 に等しい，よって H_1 は中立元 0 だけの群である．（この証明をするには，たとえば一つの三角形分割としてその辺が大円の四分の一である 8 個の三角形を用いる）．

2 次元ホモロジー群についてはふれない．

2）点 O で穴のあいている平面，したがって $R^2 - O$. この空間はコンパクトでない，しかし有限ホモロジーの方法やコンパクトな場合の方法が使えるために，有限個の順序単

体だけを利用するのが適当である．その類が1で表現されるような一つの基本輪体γ_1が定義でき，すべての輪体γはこの基本輪体をn倍したものにホモロガスである（すなわち$\gamma - n\gamma_1 \sim 0$が境界である．ここで$n$は任意の符号の整数である）ことが証明される．整数$n$に対応するホモロジー類は，定義により《点Oのまわりを代数的にn回廻る》輪体の類である．したがって1次元ホモロジー群は整数の群である．

3）輪T^2．代数的位相幾何学の方法によって，このホモロジー群は加法が$(m,n)+(m',n')=(m+m',n+n')$である整数の対$(m,n)$の群であることが証明される．

たとえば，$(1,0)$で輪の子午線にホモロガスな曲線C'を，$(0,1)$で輪の緯線にホモロガスな曲線C''を表わすならば，すべての輪体は$mC'+nC''$にホモロガスである．ここでmとnは一通りに決定されるものである．このときこの輪体は中央の円のまわりを代数的にm回まわり，回転軸のまわりをn回まわるという．たとえば，軸のまわりを一回それに中央の円のまわりを一回まわるヴィラルソーの円に対しては，ホモロジー類は（± 1, ± 1）である[1)]．

この講義はL．フェリックス嬢（パリ，ラ・フォンテーヌ街）によって編輯されたものである．

[1)] C'とC''はきまった回転の向きをもっている．mとnは任意の符号の整数である．ヴィラルソーの円に二つの円の族が存在する．それぞれに対して二つの回転の向きがあり，それによって四つのホモロジー類が与えられる，$(1,1)$．$(1,-1)$．$(-1,1)$，$(-1,-1)$．

（イヴォン・ヴィラルソー（1813～1883）フランスの天文学者であり数学者であった．この輪の円の発見は彼によるものである．［訳注］）

公理主義的考えでは，数学は要するに，抽象的形式，つまり，数学的構造の貯蔵庫のようなものである．そうして，なぜであるかはよくわからないが，実験的現実のある相が，これらの形式のあるものに，一種の前世からの因縁のように，ぴったり合うということが起こるのである．もちろん，これらの形式の大部分が，はじめははっきりした直観的な内容を持っていたことは否定できない．しかしこれらの形式が潜在的に持っているあらゆる効力が発揮できるようにし，さらに新しい解釈をうけ入れる余地を作り，同化の役割を完全にはたせるようにしたのは，まさに，この内容からそれらの形式を意識的にひき出したからである．

公理主義的方法を《形式主義》であるといってよいのは，《形式》ということばを以上のように考えるときだけである．公理主義が数学に与える統一は，形式論理の装備，生命のない形骸の統一とは異なる．これは，発育ざかりの有機体の栄養に富んだ樹液であり，ガウス以来数学のすべての偉大な思想家達，ルジューヌ・ディリクレの公式にしたがって，つねに《計算に思想を注入すること》をめざす人びとが意識的に働くための，研究上の柔軟な多産な武器なのである．

ニコラス・ブルバキ
(《数学思想の大きな流れ》
の中の数学の建築術より)*)

*) 森　毅著“現代数学とブルバキ”(東京図書) 中の銀林浩氏の訳による．［訳注］

索　　引

ア　行

アレクサンドロフ=チェク の次元の定理　198
イデアル　25, 26, 27, 28
位置解析学　219
移動　5
一価性　215
ヴァイル　93
裏返し　96
エルミート　78
　—— 形式　74
　—— 作用素　80
エンリケスの定理　218
延長（一様連続関数の）　152
演算　4

カ　行

カルタン（E.）　98
カントルの三進集合　124
ガロア　8
可換律　6
回転　96
開集合　142, 168
階数（スカラー連立方程式の）　46
　——（線型写像の）　50, 41
　——（ベクトル系の）　48
合併　5
完備　179
　—— 化（距離空間の）　154, 178
　—— 空間　151
関数　4
環　8, 9, 17, 18, 20
　主 ——　26
　商 ——　20
　全順序可換 ——　117
　単項イデアル ——　26
　ネーター ——　27
　ユークリッド ——　26
記号的添加　19
基底（イデアルの）　26
　——（線型空間の）　38
球面（S_n）　214
距離　130, 136
　擬 ——　137
　測地的 ——　140
共通部分　5
境界（p-鎖の）　221
行列（n 行 p 列の）　53
　—— 式　64
　斜交 ——　99
　随伴 ——　79
　相以な ——　67
　直交 ——　83, 95
　転置 ——　59
極形式　80
極限（数列の）　128
近傍　124, 168
区間（開または閉）　123
空間（C_n）　75
　位相線型 ——　181
　完備 ——　177
　距離 ——　136, 151
　距離のつく ——　195
　局所コンパクト ——　176

コンパクト ——　150, 173, 195
鎖状連結 ——　176
正規——　195
射影 ——　214
線型 ——　10, 31
双対 ——　42
等方部分 ——　97
凸 ——　183
ノルム ——　184
バナハ ——　177
ファイバー ——　207
部分 ——　35
部分線型 ——　35
分離 ——　170
ベクトル ——　31
補 ——　94
補部分 ——　36, 43, 95
ポアンカレ ——　14
ユークリッド ——（R^n）　33
連結 ——　176, 201
群　7
アーベル ——　7, 17
アーベル半 ——　19
（一般）線型 ——　64, 93
基本 ——　14, 211
交代 ——　104
斜交 ——　100
線型 ——　64
全順序可換 ——　117
対称 ——　104
直交 ——　83, 96
特殊線型 ——　93
特殊ユニタリ ——　99
部分 ——　12
ホモロジー ——　226
ポアンカレ ——　14, 211
ユニタリ ——　83, 93
ユニモジュラ ——　93
結合　52
律 ——　6
線型 ——　36
元（集合の）　4, 6, 7
コーシー列　129, 151
固有値　69, 81
弧（曲線の）　14
語　5
合同　19, 20, 24

サ　行

作用域　5
作用素　60
エルミート ——　80
随伴 ——　79
線型 ——　60
対称 ——　80
鎖（p-）　225
座標　38
—— 形式　42
同次 ——　108
三角形分割可能（球面の）　224
算法　4
四元数　206
ジョルダンの定理　201
次元（空間の）　39, 191
下組　119
写像　4, 10, 48, 199
自己準同型 ——　60, 213
自己同型 ——　62
縮小 ——　153
準同型 ——　10, 24, 49, 206
線型 ——　40
等長 ——　141
同型 ——　34, 49
同相 ——　145, 149, 191
倍 ——　34
斜交移換　101
収束　156, 160

周期 135
集積点 125
準同型 24
—— の像 24
—— の同値 25
商集合 13
上界 118
上限 118
剰余類 13
—— 環 20
振幅 148
スカラー 32
—— 積 76, 96
—— 連立方程式 46
スペクトル 69
推移律 11
正規直交系 76
正則 62
正値 90
半 —— 90
成分 38
整域 20
整数（mod. m の） 13
ガウスの —— 20
跡（行列の） 70
積 52
エルミート・スカラー —— 76, 99
スカラー —— 76, 96
積集合 4
接触 143
—— 点 125
線型形式 42, 188
線型従属 38
線型独立 38
線型方程式 43
双線型 42
相似 67
像 41
束 110
測度（k-次元） 202

タ 行

多項式 61
—— 環 9
特性 —— 70
多様体（n 次元の） 192
アフィン —— 44
位相 —— 207
線型 —— 109
体 8, 18, 122
位相的 —— 132, 224
商 —— 21
全順序可換 —— 120
分数 —— 21
対称 80
—— 群 104
—— 変換 96, 98
—— 律 11
単体（p-） 194
位相的 —— 224
p-順序 —— 224
置換 211
逐次近似 153
直径（集合の） 130
直交 76
—— 行列 83, 95
—— 群 83, 96
—— 変換 95
デイュドネ 93, 98, 187
転置 80
—— 行列 59
同型 4, 8
—— 写像 8, 34, 39
準 —— 24
同値関係 11
同値類 68
同伴形式 80

特異（作用素が）　62

ナ　行

二次形式　73
ネーター　3, 27
ノルム　76

ハ　行

ハウスドルフの公理　192
ハミルトン=ケイリーの定理　72
反射律　11
反変性　67
ヒルベルト　27
被覆　206
　自明な ——　207
　普遍 ——　213
表現　53
標準化（行列の）　68
標準的双線型形式　42
標数　22
ファン・デル・ヴェルデン　93
フェルマの定理　23
ブロウエル　220
複体　224
ペアノ曲線　202
ベクトル　32, 76, 202
　—— 場　220
　固有 ——　69, 81
　単位 ——　54
　直交 ——　76
閉集合　123
閉包　125
変換　5
　—— の不動点　220
　斜交 ——　99
　対合 ——　97
　対合的線型 ——　93
　対称 ——　98
　直交 ——　95
ホモトープ　14
ホモトピー　209
ボルツァノ=ヴァイエルシュトラスの定理　126, 173
ボレル=ルベーグの定理　126, 173

マ　行

交わり（束の）　111
密な集合　118
路（長さのある）　140, 207
　——（ホモトープな）　209
　閉 ——　14
結び目　217
メンガー=ウソンの定理　196

ラ　行

リーマンの定理　218
リプシッツ型　148
留数　220
領域　220
輪体　226
ルベーグ　199
類　12
連続　118, 127, 135, 142, 148, 169
　—— 集合　118
　—— 率　148
　一様 ——　131, 175
連立方程式　44, 45

ワ　行

輪　214, 228

訳者あとがき

この労作の序文を読んで感動し，翻訳を決意してからすでに数年が経過しました．なにしろ非学浅才のこととて，仏語および数学の知識はむろんのこと，日本語自体さえもおぼつかなく多くのかたがたのご助力とご教示をいただきました．とくに畏友目黒俊雄君には原稿の通読をお願いし有益なご指摘をいただき厚くお礼申しあげます．

また東京図書の大竹進氏ならびに市橋公生氏には一方ならずお世話様になり深く感謝いたします．

訳者紹介

庄司浩三（しょうじ こうぞう） 1954年 新潟大学理学部数学科卒業
現 在 新潟工業高等学校教諭

代数構造と位相構造 ¥1300

1971年9月10日 第1刷発行

訳者との申し合わせにより検印を省略いたします

著 者 カルタン 他
訳 者 庄 司 浩 三
発行所 東京図書株式会社
本 社 東京都新宿区本塩町 23（田中ビル）
振替東京 13803 電話（357）0636〜7
営業所 東京都文京区水道 1—8—1
電話（814）7818〜9

落丁乱丁はお取替えします

3341-2050-5160